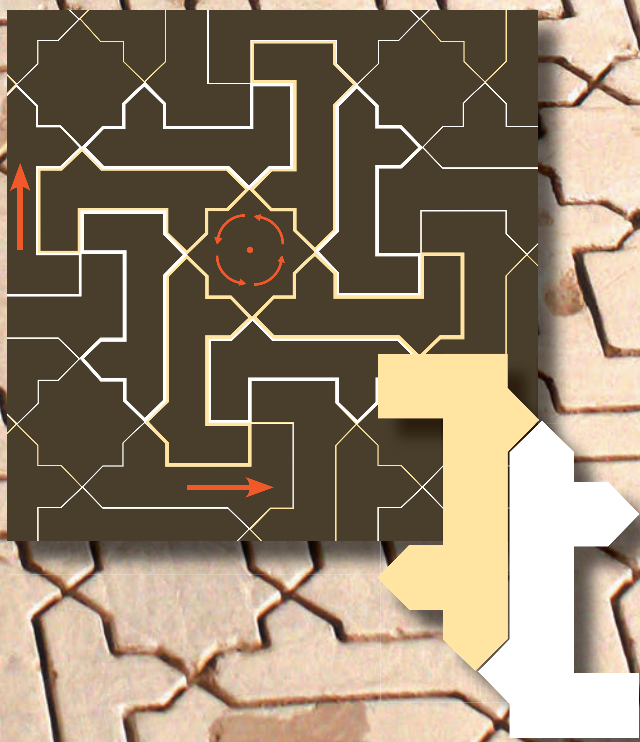
МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ №3 (773)

ИЗДАЕТСЯ С 1992 г.

mat.1september.ru



электронная версия журнала
дополнительные материалы
в Личном кабинете
на сайте
www.1september.ru

издательский дом
1september.ru
Первое сентября

март
2016

МАТЕМАТИКА Подписка на сайте www.1september.ru или по каталогу «Почта России»: 79073 (бумажная версия); 12717 (CD-версия)

В НОМЕРЕ

К материалам, обозначенным этим символом, есть дополнительные материалы в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru

УВАЖАЕМЫЕ ЧИТАТЕЛИ!

Все подписчики журнала имеют возможность получать электронную версию, которая не только является полной копией бумажной, но и включает дополнительные электронные материалы для практической работы.

Для получения электронной версии:

1. Откройте Личный кабинет на портале «Первое сентября» (www.1september.ru).
2. В разделе «Газеты и журналы/Получение» выберите свой журнал и кликните на кнопку «Я – подписчик бумажной версии».
3. Появится форма, посредством которой вы сможете отправить нам копию подписной квитанции.

После этого в течение одного рабочего дня будет активирована электронная подписка на весь период действия бумажной.

МАТЕМАТИКА. ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ

Методический журнал для учителей математики

Издается с 1992 г. Выходит один раз в месяц

РЕДАКЦИЯ:
Главный редактор: Л. Рослова
Отв. секретарь: Т. Черкавская
Редакторы: П. Камаев, О. Макарова, И. Коган
Дизайн макета: И. Лукьянов. Дизайн обложки: Э. Лурье
Корректор: Л. Громова. Верстка: Л. Кукушкина

Распространяется по подписке

Цена свободная
Тираж 22 000 экз.

Тел. редакции: (499) 249-3460
E-mail: mat@1september.ru
Сайт: mat.1september.ru

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ДОМ «ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ»
Главный редактор: Артем Соловейчик (генеральный директор)
Коммерческая деятельность: Константин Шмарковский (финансовый директор)
Развитие, IT и координация проектов: Сергей Островский (исполнительный директор)
Реклама, конференции и техническое обеспечение Издательского дома: Павел Кузнецов
Производство: Станислав Савельев
Административно-хозяйственное обеспечение: Андрей Ушков
Педагогический университет: Валерия Арсланьян (ректор)

ЖУРНАЛЫ ИЗДАТЕЛЬСКОГО ДОМА:
Английский язык – Е. Богданова, **Библиотека в школе** – О. Громова, **Биология** – Н. Иванова, **География** – А. Митрофанов, и.о. **Дошкольное образование** – Д. Тюттерин, **Здоровье детей** – Н. Сёмина, **Информатика** – С. Островский, **Искусство** – О. Волкова, **История** – А. Савельев, **Классное руководство и воспитание школьников** – А. Полякова, **Литература** – С. Волков, **Математика** – Л. Рослова, **Начальная школа** – М. Соловейчик, **Немецкий язык** – М. Бузоева, **ОБЖ** – А. Митрофанов, **Русский язык** – Л. Гончар, **Спорт в школе** – О. Леонтьева, **Технология** – А. Митрофанов, **Управление школой** – Е. Рачевский, **Физика** – Н. Козлова, **Французский язык** – Г. Чесновицкая, **Химия** – О. Блохина, **Школа для родителей** – Л. Печатникова, **Школьный психолог** – М. Чибисова.

Иллюстрации: фотобанк Shutterstock
На с. 1 и 64 — фото Л. Рословой

УЧРЕДИТЕЛЬ:
ООО «ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ДОМ «ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ»
Зарегистрировано ПИ №ФС77-58424 от 25.06.14 в Роскомнадзоре
Подписано в печать: по графику 16.12.15, фактически 16.12.15 Заказ №
Отпечатано в ОАО «Первая Образцовая типография» филиал «Чеховский печатный двор» ул. Полиграфистов, д. 1, Московская область, г. Чехов, 142300; Сайт: www.chpd.ru; E-mail: sales@chpk.ru; факс: 8(496)726-54-10, 8(495)988-63-76

АДРЕС РЕДАКЦИИ И ИЗДАТЕЛЯ:
ул. Киевская, д. 24, Москва, 121165
Телефон/ факс: **(499) 249-3138**
Отдел рекламы: **(499) 249-9870**
Сайт: **1september.ru**
facebook.com/School.of.Digital.Age

ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ПОДПИСКА:
Телефон: **(499) 249-4758**

ПОДПИСНЫЕ ИНДЕКСЫ:
Почта России: бумажная версия – **79073**; CD-версия – **12717**

ВНИМАНИЕ К НЕВНИМАТЕЛЬНОСТИ!

Л. РОСЛОВА

Изучая аналитику результатов последних исследований, экзаменов и пр., касающихся математики, обратила внимание на то, что в качестве основной претензии к неуспешным учащимся, которые допустили ошибки при выполнении задания, чаще других звучит *невнимательность*. Откуда же она взялась? Разве раньше дети были более внимательными? Может ли такое качество быть присуще целому поколению?

Не знаю. Но позиция, конечно, удобная для многих, потому что этим можно объяснить что угодно. И думать не надо. И делать ничего не надо. Невнимательность — характеристика психологическая, вот пусть психологи этим и занимаются. А мы будем продолжать решать уравнения и твердить: «Будьте внимательны!», «Внимательно читайте условие», «Проверьте внимательно решение». Все здорово, только делать-то что? Какие конкретные действия должен при этом совершать ученик? Об этом не говорится, да и в учительских материалах не так часто можно встретить советы и приемы, как тренировать внимание. Разве что странноватые задания из психологических тестов на проверку внимательности. Мало того, что это искусственно сконструированные задания, они еще и к математике не имеют никакого отношения.

Да и под невнимательностью могут скрываться совершенно разные недостатки. Например, невысокий уровень рефлексии, если ученик выдает в ответе пресловутые «полтора землекопа», или несформированность навыков контроля, если вместо «в порядке возрастания» выдает «в порядке убывания», или неспособность удержать в памяти всю задачу, если ограничивается выполнением одного действия задачи вместо двух. И бороться с ними надо по-разному.

А есть еще невнимательность, связанная со стрессом. Можно ли удерживать внимание на высоком уровне на протяжении всего урока? А четырехчасового экзамена? Здесь скорее даже речь идет о концентрации внимания и интеллектуальных усилий. Шоколадку в какой момент есть? Можно, когда глаз упадет, а можно заранее спланировать, если знаешь свои возможности и недостатки.

В общем, вопросов получилось больше, чем ответов. Ответы действительно найти не так просто. Более того, даже среди психологов нет единодушия по поводу природы и сущности внимания. Сложность этого феномена в том, что не бывает внимания в «чистом» виде, оно всегда «внимание к чему-либо». Рекомендации же о том, как формировать внимание на уроках математики, что-то мне не попадались. Возможно, кто-то когда-то и защищал на эту тему диссертации, однако...

Что ж, давайте хотя бы мы сами будем внимательны к нашим детям: подойдем к ним не с очередной претензией, а с конкретными педагогическими знаниями и своим человеческим опытом.

В. ГОЛЬДИЧ, Г. ВОЛЬФСОН,
almetov9@yandex.ru,
georgij.volfson@gmail.com,
г. Санкт-Петербург

«КОРМЛЕНИЕ ДИКИХ ЗВЕРЕЙ»

КАК ПРЕВРАТИТЬ РАВНОДУШНЫХ ДЕТЕЙ В РЕШАТЕЛЕЙ ЗАДАЧ


Фото В. Жарова


Фото В. Савенковой


Фото В. Жарова

О нашей системе

В течение многих лет нас мучил вопрос: как активизировать деятельность учеников во время урока, как убедить их постоянно работать? Как превратить уроки математики в развлечение, о котором они будут вспоминать долгие годы? Как сделать домашние задания посильными, достаточно объемными и одновременно интересными? Предлагаемая система позволяет, на наш взгляд, решить эти и ряд других, не менее важных проблем.

Как добиться систематического выполнения домашних заданий? Вопрос, отвечая на который сложили головы многие учителя — и ушли из профессии. А что же предлагаем мы?

С первого же урока ученик заводит отдельную тетрадь для домашних заданий. А в классной тетради каждый урок имеет порядковый номер, таким образом, выполняя домашнее задание, ученик должен прежде всего написать в тетради: Д.З. № 1 — в соответствии с номером урока в классе.

Когда ученик выходит к доске, у него должна быть тетрадь для домашних заданий со всеми предыдущими работами. Более того, когда такая тетрадь заканчивается, ученик обязан показать ее учителю, чтобы тот подписал следующую тетрадь. При этом учитель проверяет наличие всех предыдущих домашних работ. Здесь важно не перегнуть палку — не следует ставить «2» за отсутствие старой тетради. Можно обойтись штрафом, например, в 5 очков. Очки играют существенную роль в данной системе работы.

Кроме обычных оценок, которые ученик получает традиционным образом — за самостоятельные и контрольные работы, за ответы по теории и т.д., — он может зарабатывать очки. Их можно получить:

– за дополнения ответа других учеников у доски;
– исправление ошибки, допущенной учителем или учеником при записи на доске;
– решение дополнительных задач в начале урока;
– решение дополнительных задач после выполнения обязательной части работы на уроке;
– решение домашних дополнительных задач (сдает на отдельных листочках в начале каждого урока);
– перевыполнение «нормы» на спецкурсе «Решение задач повышенной трудности» (еще одна важная составляющая системы);
– выполнение заданий заочной круглогодичной олимпиады;
– ответы на трудные вопросы во время фронтальной работы на уроке.

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru (Игры.)

Начало урока

Почти всегда в начале обычных уроков (система предполагает и другие виды уроков, но о них позже), пока 2–3 ученика готовят у доски ответы по домашнему заданию, остальные получают две дополнительные задачи. Одна простая, другая более сложная. Учитель принимает решение сразу двух задач. За правильное их решение ученик получает 3, редко 4 очка. Если верно решена только одна задача, он получает 1 очко (в сильных классах — ничего).

Решение обеих задач обязательно записывается на доске. Обычно решение записывают те, кто первым справился с предложенными задачами, но это необязательно, запись на доске могут делать разные ученики. За аккуратную запись решения задачи на доске добавляется 1 очко. Сдавать решение задач можно еще некоторое время после того, как с ними закончили самые быстрые. Таким образом в начале урока могут получить очки от двух до восьми человек.

Новый материал

После объяснения нового материала следует обязательно показать, как решаются и оформляются новые типы задач, наиболее важные записываются в *конспект*, который предназначен только для записи методов решения сложных задач с новыми идеями. На уроке ученик все записывает в классную тетрадь, а дома *аккуратно и красиво* переписывает в тетрадь для конспектов, которая переходит с учеником из класса в класс. Не сразу удается убедить учеников в полезности такой работы, но после того, как они начинают получать пятерки за ведение тетради для конспектов, а потом и пользоваться ею для решения задач, большинство ведут ее вполне достойно. Тетради с конспектами 3–4 раза в год собираются на проверку, оценки выставляются в колонку. Отметку «2» мы не ставим никогда — ученик, не сдавший конспект вовремя, должен сдать его потом, иногда оценка снижается, но если конспект сделан качественно, то можно и «5» поставить, но за опоздание ученик получает штраф — отрицательные очки.

Следующий этап урока — самостоятельное решение задач из учебника. Учитель сразу же выписывает все номера. У доски работают один-три ученика. Следует иметь в виду, что сильный ученик способен решать на месте намного быстрее, чем те, кто решает у доски. Он сразу же получает дополнительные задачи, которые заранее распечатываются на отдельных листочках для каждого. Однако эти задачи ученик получает только после того, как покажет учителю сделанную классную работу.

Вы спросите, зачем ученику торопиться? Да, действительно, зачем ученику *вообще* что-то делать на уроке? (Вы знаете ответ? Мы — нет!) А в нашем случае на то есть причина: если он решит дополнительные задачи в классе, то получит за каждую номинал. А если эта задача будет решена дома и сдана на следующем уроке — только половину номинала. И еще он уменьшит объем своего домашнего задания! Как результат, ученик начинает понимать, что если он будет работать в полную силу на каждом уроке, то существенно облегчит себе жизнь и получит хорошие отметки.

Сделаем небольшое отступление. Современные дети сильно отличаются от тех, кто ходил в школу 20 или 30 лет назад. Часто у них нет устойчивого навыка упорной работы — компьютер приучил их к получению ответов после нескольких щелчков мыши. Вот почему очень важно убедить их, что упорные поиски решения на уроке приведут к успеху. Сначала нужно научиться работать на уроке, самостоятельно, не списывая, тогда и дома не возникнет проблем. Опыт работы показывает, что дети, которые научились работать на уроке, начинают решать задачи и дома. Первые шаги сделаны. Успех уже близок.

Впрочем, для достижения хороших результатов необходим и достаточно жесткий контроль. Нужно применять понятные для учащихся требования, которые должны оставаться неизменными в течение учебного года. Вот почему появляются отрицательные очки. Нельзя ставить двойки за поведение — эта истина известна каждому учителю. Но если ученик отвлекся, не слушал объяснение нового материала, бездельничал, мешал другим — у него всегда можно забрать несколько очков. Здесь уместно провести аналогию с реальной жизнью. Учеников любого класса можно разделить на три группы: «богачей», «средний класс» и «пролетариат». «Богачи» — это отличники, у них накапливается много очков. К «среднему классу» отнесем тех, кому есть что терять. Ну, а про «пролетариат» вы и без нас все знаете. Таким образом, главная задача учителя — создать в среде учеников этот самый «средний класс», а «богачи» сами о себе позаботятся.

Но вернемся к уроку. Мы остановились на том, что учитель выдает тем, кто справился с классной работой, листочки с дополнительными задачами, их может быть от трех до восьми, в зависимости от класса. Очень важно правильно составить дополнительные задачи. Первые две должны быть достаточно просты и стоить по 2 очка. Они посильны даже троечнику. Более сложные дополнительные задачи обычно стоят по 3 очка, уровень их сложности можно оценить как средний. Они должны быть посильны хорошему ученику, но с некоторыми усилиями. Последние одна или две задачи стоят по 4 очка и требуют от ученика существенных усилий, в них может быть новая идея или технические трудности (отличник должен постоянно напрягаться).

Вводится понятие «норма» — половина всех дополнительных задач. Таким образом, учитель получает сигнал от каждого ученика: хочет он получить в четверти «5» или «4» или ему все равно и он согласен на «3» или и вовсе не намерен ничего делать. Когда на следующем уроке учитель вызывает кого-то к доске, то ученик должен показать не только домашнюю тетрадь с обязательным заданием, но и листок с дополнительными задачами. Если у него нет «нормы», то больше «3» он за ответ не получит. Чтобы получить «4», нужно иметь хотя бы половину верно решенных дополнительных задач. Для получения «5» ученик должен решить все дополнительные задачи.

В последние годы мы ввели понятие «*» (звездочка), которую ученик получает за все верно решенные дополнительные задачи одного задания. Эти звездочки учитываются в конце каждого полугодия вместе с другими номинациями, о которых мы расскажем позже.

Наконец, дополнительные задачи показывают ученику уровень сложности, который его ждет на самостоятельных и контрольных работах, и он может заранее отработать новые идеи, чтобы у него не возникло ощущения, что он должен решить нечто невероятно сложное.

Заключительная часть урока

Свободное решение задач. В оставшиеся 15–20 минут ученик может решать дополнительные задачи и получать очки — номинальную стоимость задачи. А на следующем уроке, сдавая решения дополнительных задач, он пишет в своем листочке: «Задачи 11-1 и 11-2 сделаны на уроке» (если, конечно, он их решил!). Иными словами, хорошая работа на уроке позволяет уменьшить объем домашнего задания.

Уроки-практикумы

Иногда целый урок, а в классе с углубленным изучением математики — два, посвящается решению задач. Такие уроки можно проводить в любом классе, но мы обычно начинаем их «включать» с 7-го класса. В начале урока ученикам предлагается пять задач, из которых решение четырех является нормой. И если ученик успевает их решить к заранее объявленному сроку, то получает «4». Не хочешь «4» — перевыполняй норму, тогда имеешь «4» (отличники ее не ставят, а троечникам это надо) плюс баллы. Из этих баллов отличник потом может «сложить» свою пятерку. Идея в том, что эти пять задач довольно просты — чтобы их решить, много ума не надо, поэтому для отличника это, по сути, обязательная программа, он за это не сильно поощряется. А вот накопив очки, он и получит свою пятерку.

Здесь очень важно, чтобы учитель имел ответы ко всем задачам и мог их быстро проверить, а ученик должен не только дать ответ, но и *записать* решение.

Еще раз об очках

Зачем ученику нужны очки и как он их может использовать?

1. Как только ученик накопил 8 очков (или 10, 12, 15; это число меняется — инфляция к старшим классам!), он, по желанию, может получить «5» в журнал. Некоторые копят их на «черный день», но в конце каждой четверти ученик обязан выставить все пятерки в журнал, при этом остаток должен быть меньше 8 (он переходит в следующую четверть, но не на следующий год).

2. Очки полезно иметь для штрафов — за самостоятельные работы иногда можно выставить отметку «5 со штрафом», ..., «3 со штрафом». Например, вот самостоятельная работа для 5-го класса.

1. Выполните деление:
а) 720 048 : 8; б) 7372 : 97;
в) 98 044 : 386; г) 56 114 054 : 7009;
д) 1 234 566 000 : 900; е) 46 493 184 : 512.

2. Решите уравнение:
а) $a : 67 = 670$; б) $3220 : b = 35$;
в) $(214 - 7c) \cdot 42 = 5460$.

3. Катя и Миша одновременно начали читать одинаковые книги, причем Миша читает в 4 раза медленнее Кати. Через три дня выяснилось, что Катя прочитала 144 страницы, а Мише осталось прочитать 396 страниц. Через сколько дней Катя дочитает книгу, если предполагается, что скорость чтения в день у каждого не меняется?

4. Известно, что A меньше B в 6 раз, а B больше C в два раза. Что больше: A или C? Во сколько раз? Не забудьте обосновать свой ответ!

5*. Сколькими нулями заканчивается произведение $100 \cdot 101 \cdot ... \cdot 200$?

С учетом пунктов, в ней 12 заданий, одно из которых — со звездочкой, оно оценивается отдельной отметкой, так что пятерка ставится за 11 заданий. А вот за 10 заданий тоже ставится пятерка, но уже со штрафом. Штраф иногда варьируется в зависимости от работы и допущенных ошибок, Например, если ученик верно сделал 10 заданий и больше ничего, то штраф

6 очков, если же он верно сделал 10, а в одиннадцатом у него мелкая описка в ответе, то штраф будет 2–3 очка.

Далее: за решение девяти заданий — четверка, за решение восьми заданий — четверка со штрафом 3 очка, за решение 7 заданий — четверка со штрафом 6 очков, за 6 заданий — тройка, за 5 — тройка со штрафом 6 очков, меньше пяти заданий — двойка.

Конечно, все это работает, если у данного ученика есть очки! Если же ученик решил 10 заданий, но очков у него нет, увы, ставится четверка. Так что есть резон зарабатывать очки, работая на уроках и дома. Кстати, при выставлении оценок за контрольные работы очки не учитываются!

3. Очки используются и при оценке спецкурса, который является существенной частью системы. Расскажем о нем.

Спецкурс «Решение задач повышенной трудности»

(*2 часа в неделю*)

В течение многих лет мы вели математические кружки с небольшими группами учащихся — способных и имеющих высокую мотивацию. На кружке решались трудные и интересные задачи, но успехи кружковцев никак не влияли на общие результаты класса. В некоторый момент посещающие кружок дети начинали стремительно перегонять остальных, и работа в классе усложнялась. Нам удалось интегрировать кружки (спецкурс) в общую систему благодаря нескольким простым идеям.

1. Спецкурс начинается с 7-го класса.

2. Желательно, чтобы на спецкурс ходил весь класс, но это возможно далеко не всегда.

3. Вводится понятие нормы: она, как правило, составляет половину от общего числа задач, а обычно на занятии предлагается 6–8 задач. Выполнить норму ученик может, решая задачи на занятии и дома. Задача, решенная на занятии, засчитывается как целая, а дома — как половина. Задачи на занятии предлагаются разной сложности (одна-две достаточно простых), так что слабый ученик может решить одну задачу на занятии, средний — 2–3, сильный — 3–5. На следующем занятии после разбора наиболее сложных трех-четырех задач предыдущего занятия учитель принимает домашние задачи. Учет ведется на *каждом* занятии, а на обложке тетради учитель постепенно заполняет таблицу: I занятие — 2,5 задачи; II занятие — 3 задачи, III — 1,5 задачи, IV — 2 задачи, V — 4,5 задачи...

К концу учебного года таблица заполняется, учитель суммирует решенные задачи и подводит итоги. За каждое занятие может быть выставлена оценка. Пример: I занятие — до нормы не хватает 0,5 задачи — ученик получает «3» либо, если у него есть 6 очков, он их платит в качестве штрафа и получает «4». За II занятие ученик получает «4» в любом случае — норма выполнена. За III — «3» в любом случае, за IV — «3» или «4» со штрафом 10 очков, то есть теряет отметку «5». За V — «4» по желанию (отличники обычно не хотят) плюс 6 очков за перевыполнение плана; в его копилку идут очки за самые «дорогие» решенные задачи — $4 + 4 \cdot 0{,}5 = 6$ очков.

Легко увидеть, что ученик может получить оценку «5», если решит 5,5 или 6 задач, но в любом случае за перевыполнение нормы получает очки. Следует отметить, что отметку «2» при такой системе получают только самые нерадивые ученики; обычно за год в классе получается не более 3–4 двоек за все 25 занятий.

Алгебра и геометрия обычно чередуются, и каждое занятие идет в зачет по алгебре или по геометрии. Для 7-го класса задачи по геометрии подобрать сложнее, поэтому занятий по геометрии несколько меньше.

Спецкурс предназначен для выработки навыков решения сложных задач, подготовки к олимпиадам и вступительным экзаменам в вузы.

Само занятие протекает так. Вначале разбираем наиболее сложные задачи предыдущего занятия. Затем ученикам выдаются задачи нового занятия, они их решают и параллельно, по алфавиту, показывают свои результаты прошлого занятия (решено что-то было в классе, что-то дома), учитель вносит их в свою ведомость. Одновременно дети сдают новые задачи — это происходит до конца второго урока. А на следующем занятии все повторяется.

Наш опыт работы в таком режиме показывает, что у учеников пропадает страх перед нестандартной формулировкой условия, они начинают охотно применять новые идеи. Соревновательный характер занятий вносит элемент игры, позволяя выявить лучших. В анкетах выпускники уже нескольких поколений высоко оценивают пользу спецкурса, который продолжался у них в течение 5 лет. Приведем образцы занятий спецкурса. Разумеется, задания могут быть и проще, и сложнее — все зависит от уровня класса.

Занятие 1. Алгебра

7-й класс

1. (*3 очка*) Выразите 10 через пять девяток всеми возможными способами без применения скобок.

2. (*2 очка*) Один фонтан наполняет бассейн за 2,5 часа, а другой — за 3,75 часа. За какое время наполнят бассейн оба фонтана?

3. (*2 очка*) Вычислите рационально:

$$\frac{254\cdot 399-145}{254+399\cdot 253}.$$

4. (*3 очка*) На какое наибольшее количество нулей может оканчиваться произведение трех натуральных чисел, если их сумма равна 407?

5. (*4 очка*) На 22 карточках написаны натуральные числа от 1 до 22. Из этих карточек составили 11 дробей. Какое наибольшее число этих дробей может иметь целые значения?

6. (*3 очка*) Цена входного билета на стадион составляла 40 рублей. После снижения входной платы число зрителей увеличилось на 25%, а выручка выросла на 12,5%. Какова новая цена?

Занятие 10. Геометрия

7-й класс

1. (*3 очка*) Докажите, что если медиана треугольника является его биссектрисой, то треугольник является равнобедренным.

2. (*2 очка*) Отрезки AB и CD пересекаются в точке O, которая является серединой каждого из них. Докажите, что треугольники ABC и ABD равны.

3. (*4 очка*) У Ани есть торт размером 5 × 5 с четырьмя изюминками (рис. 1).

Аня хочет двумя прямолинейными разрезами разделить торт на четыре части — каждый с изюминкой — так, чтобы ей достался кусок с изюминкой в правом верхнем углу и этот кусок составлял $\frac{1}{5}$ всего торта. Как ей быть?

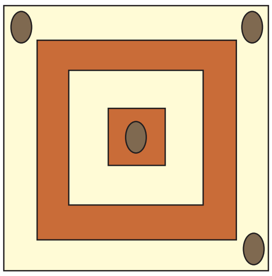


Рис. 1

4. Дан прямоугольник $ABCD$, площадь которого равна 15. Найдите площадь треугольника PQH (рис. 2).

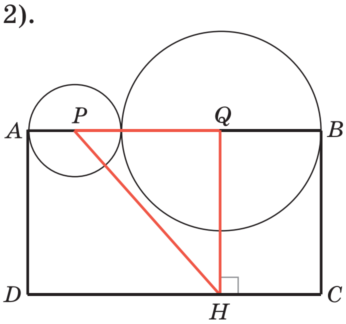


Рис. 2

5. (*3 очка*) Разрежьте данную фигуру на уголки (рис. 3) так, чтобы квадратики с точками оказались только в больших уголках.

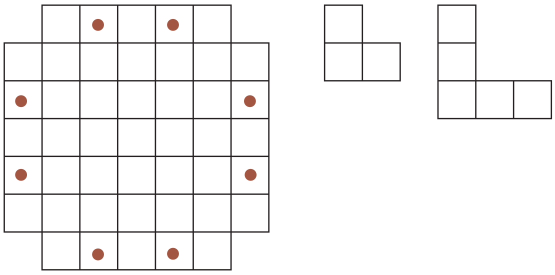


Рис. 3

6. (*4 очка*) Нарисуйте многоугольник и точку внутри него так, чтобы ни одна из его сторон не была видна полностью.

Занятие 4. Геометрия

8-й класс

1. (*2 очка*) Как с помощью циркуля и линейки разделить угол 35° на 7 равных частей?

2. (*3 очка*) Дан четырехугольник $ABCD$, точка K лежит на стороне AB; $AB = AD$, $AK = KC$, $BC = CD$. Докажите, что $KC \parallel AD$.

3. (*3 очка*) Окружность, построенная на катете прямоугольного треугольника как на диаметре, делит гипотенузу в отношении 1 : 3. Найдите углы треугольника.

4. (*4 очка*) Точка K — середина стороны AB квадрата $ABCD$. Точка L лежит на диагонали AC и делит ее в отношении 3 : 1, считая от вершины A. Найдите угол KLD.

5. (*2 очка*) Дан квадрат $ABCD$. На стороне AD внутрь квадрата построен равносторонний треугольник ADE. Диагональ AC пересекает сторону ED этого треугольника в точке F. Докажите, что $CE = CF$.

6. (*4 очка*) Дан треугольник ABC, в котором

$$\angle C = 90^\circ,\ \angle B = 40^\circ;\ D \in [AB],\ E \in [BC];$$
$$\angle EAD = 5^\circ,\ \angle ECD = 10^\circ.$$

Найдите угол EDC.

Игры

Возможно, у читателя назрели некоторые вопросы и сомнения. Да, система очков может поднять мотивацию, особенно на первых порах ее введения. Но так ли она эффективна при длительном использовании? «Зажечь» интерес с помощью очков можно, но как его «подогревать», особенно если ребята исходно не слишком мотивированы? И вот здесь на помощь приходят математические игры, которые замечательно встраиваются в основную систему.

Пожалуй, самые скучные уроки — это уроки повторения-закрепления. Вроде бы все давно всё поняли (по крайней мере, ученикам так кажется!), а этот зануда у доски снова и снова разбирает аналогичные примеры. Сколько можно?! Так почему бы не провести эти уроки в игровой форме? Не секрет, что дети любят играть в любом возрасте, так что интерес к таким урокам будет априори. Значит, ответ на вопрос «Что делать?» более-менее ясен. Остается не менее острый вопрос «Как делать?».

Игра игре рознь. Хорошая математическая игра должна быть захватывающей, непредсказуемой, сбалансированной, а кроме того, еще и полезной с точки зрения повторения материала. Представим вашему вниманию несколько таких игр. Они похожи друг на друга тем, что содержат элемент соревнования, а победители награждаются, конечно, пятерками и... очками! Они проникли и сюда! Ведь, согласитесь, ужасно несправедливо, когда одна команда получает всё (по пятерке, например), а другие — ничего. И ладно бы ничего: на одном из открытых уроков мы увидели «потрясающее» поощрение за второе место — всей команде по четверке! А отличница из этой команды рыдала навзрыд. В нашем же случае можно за второе место каждому участнику команды дать, например, по 7 очков (почти пятерка!), за третье — по 6 очков и так далее. Отдельно можно премировать учеников или команды, решившие наиболее сложные задачи либо придумавшие самые красивые решения.

Но реклама что-то затянулась, перейдем к описанию игр.

Уровни (лесенка)

Предположим, требуется повторить тему «Смешанные числа». Какого типа задачи там встречаются? Перевод из смешанного числа в неправильную дробь и обратно; сложение и вычитание смешанных чисел с одинаковым знаменателем, решение уравнений и текстовых задач, содержащих смешанные числа. На основании этих подтем и составляется игра. Суть ее в следующем. Все ребята получают задания, которые выглядят так.

Задание 1. Представьте в виде смешанного числа:

любитель: $\frac{652}{13}$;

профи: $\frac{1145}{19}$;

чемпион: $\frac{12\,345}{366}$;

супергерой: $\frac{11!+12!+13!}{12!}$.

Задание 2. Представьте в виде неправильной дроби:

любитель: $13\frac{15}{17}$;

профи: $127\frac{15}{31}$;

чемпион: $234\frac{261}{366}$;

супергерой: $1234\frac{321}{4321}$.

Задание 3. Вычислите:

любитель:

$$\frac{12}{17}+11\frac{6}{17}-2\frac{8}{17};$$

профи:

$$3\frac{2}{17}-1\frac{4}{39}+\frac{32}{17}+2\frac{4}{39};$$

чемпион:

$$\frac{1}{17}+1\frac{1}{17}+2\frac{1}{17}+\ldots+20\frac{1}{17};$$

супергерой:

$$1\frac{1}{366}+2\frac{3}{366}+3\frac{5}{366}+\ldots+183\frac{365}{366}+184\frac{364}{366}+$$
$$+185\frac{362}{366}+\ldots+365\frac{2}{366}.$$

Задание 4. Решите уравнение:

любитель: $4\frac{1}{3}-x=2\frac{2}{3}$;

профи: $\frac{77}{2\frac{3}{5}+x}=5$;

чемпион: $14\frac{1}{8}-\frac{19}{15\frac{1}{7}-x}=\frac{57}{8}$;

супергерой:

$$\frac{10^2+11^2+12^2+13^2+14^2}{365}-x+11=$$
$$=19\frac{1}{83}-18\frac{2}{83}+17\frac{3}{83}-16\frac{4}{83}+\ldots+1\frac{19}{83}-\frac{20}{83}.$$

Задание 5. Переведите из одних единиц в другие:

любитель: 13 дм^2 в сотки;

профи: 12 м^2 + 11 дм^2 в гектары;

чемпион: 1 ц 12 кг 14 г 17 мг в тонны;

супергерой: 13ф^{3}7д^3 в кубические ярды.

Задание 6. Решите задачу.

Любитель. Саша шел пешком из города в деревню со скоростью $4\frac{7}{9}$ км/ч. Через час он понял, что опаздывает, и увеличил скорость на $\frac{8}{9}$ км/ч, после чего пришел в деревню ровно через час. Каково расстояние от города до деревни?

Профи. Одна сторона треугольника равна $7\frac{5}{7}$ см, что на $\frac{2}{7}$ см меньше другой, но на $1\frac{6}{7}$ см больше третьей. Чему равен периметр треугольника?

Чемпион. Вова задумал число, увеличил его на 200% и получил число $11\frac{4}{7}$. Какое число задумал Вова?

Супергерой. В треугольнике каждая сторона равна полусумме двух оставшихся. Найдите все стороны треугольника, если его периметр равен $8\frac{2}{5}$ см.

Задание 7. *Босс*! Переведите в неправильную дробь смешанное число в пятеричной системе счисления: $34\frac{33}{43}$.

Сначала ученик должен решить первое задание. Как видите, решить он может задание одного из четырех уровней сложности: *любитель, профи, чемпион* или *супергерой*. (Уровней сложности может быть больше или меньше — по желанию учителя. Называть их можно по своему усмотрению.) Важно лишь то, что перейти ко второму заданию ученик может, только решив первое — любого уровня сложности. Когда же он решает второе задание, уровень сложности снова можно выбрать любой (например, первое задание решить на уровне любителя, а второе — чемпиона) и так далее. Выигрывает тот ученик, который решит задание с наибольшим номером.

Казалось бы, при таком условии лучше всегда решать задачи на уровне «Любитель». Не тут-то было. Во-первых, часто бывает, что несколько учеников к концу урока решили, например, 6 заданий, а 7-е (*босс*) не решил никто. В этом случае подсчитываются дополнительные баллы — за сложность. Каждая задача уровня «Любитель» стоит 1 балл, «Профи» — 2 и т.д. В этом случае тот, кто решил все на уровне «Любитель», получит лишь 6 баллов, а значит, почти наверняка окажется за чертой призеров. Таким образом, каждый должен выработать оптимальную для себя стратегию.

Чем хороша эта игра? Во-первых, идет повторение всех нужных тем — им соответствуют задания игры. Во-вторых, осуществляется дифференцированный подход: каждый ребенок может выбрать для себя задачу по силам. В-третьих, результат подчас получается непредсказуемым: сильный ученик может «застрять» над первой задачей самого сложного уровня, тогда как слабый за это время справится с несколькими заданиями уровня «Любитель». Кстати, учитель может сам немного «редактировать» правила игры, например, запретить ребятам, которые имеют «5» в четверти, решать уровень «Любитель», чтобы уравнять шансы (впрочем, чаще всего этого не требуется: сильные ученики считают такие задачи «ниже своего достоинства»). Кроме того, если в классе введена вышеупомянутая система очков, то игра прекрасно встраивается в нее. Предположим, что победитель получает пятерку, а что же остальные? За эту игру мы обычно просим подсчитать количество набранных баллов, разделить его на 2, а полученный результат, округленный до целого, и есть заработанные очки. Скажем, если ученик решит 6 заданий — все на уровне «Любитель», то он получит 3 очка ($6 \cdot 1 : 2$) независимо от места, которое он занял. Если же он решил первые два задания на уровне «Профи», а третье — на уровне «Чемпион», то он заработает $\frac{2+2+3}{2}=3,5\approx 4$ очка (округление — в пользу ученика). Таким образом, можно заработать пятерку, не заняв первого места. Например, если пятерка стоит 10 очков, то можно решить 5 задач уровня «Супергерой» и гарантировать себе пятерку — чем не стимул? А можно и половину пятерки за урок заработать — тоже хороший результат!

«Змейка» для двоих

Как следует из названия игры, ее проводят для пар участников, хотя можно проводить и «личное первенство». Идея игры такова.

На один или два урока (в зависимости от сложности заданий; мы обычно даем на два) парам предлагаются задачи. Решив первую, они находят значение a. Дальше решается второе задание, в условие которого нужно подставить найденное a: это приведет к нахождению значения второй буквы — b. Подставив это b в третье задание, ищем значение c и так далее. В конце занятия пара сдает все ответы; при желании учитель может потребовать решения выбранных заранее примеров (например, всех четных).

Что бросается в глаза? Огромная ответственность за результат. Ведь если первый пример решен неверно, то и второй тоже не сойдется, ведь туда нужно подставить ответ, полученный в первом! Таким образом, одна ошибка может перечеркнуть все усилия. Именно поэтому в «змейку» лучше играть парами, чтобы можно было перепроверить друг друга и быстрее найти ошибки.

Оценивать эту игру тоже можно по-разному. Один из нас придерживается следующих критериев: 4 задания — отметка «3»; 5 заданий — отметка «4», штраф 10; 6 заданий — отметка «4», штраф 5; 7 заданий — отметка «4»; 8 заданий — отметка «4» плюс 3 очка; 9 заданий — отметка «4» плюс 6 очков; 10 заданий — отметка «4» плюс 9 очков; 11 заданий — отметка «5»; 12 заданий — отметка «5» плюс «*».

Другой же ставит «5» паре (или парам), решившей больше всех заданий, а остальным столько очков, сколько заданий у них решено верно. Впрочем, систему оценивания можно создать и свою собственную. Покажем пример заданий такой «змейки» и остановимся еще на одном важном ее аспекте.

9-й класс

1. $\left(16-x^2\right)\sqrt{x+3}=0$. Найдите a, где a — сумма всех корней.

2. $\frac{8}{\sqrt{10-x}}-\sqrt{10-x}=a+1$. Найдите b, где b — среднее арифметическое корней уравнения.

3. $2\sqrt{x-1}+b=\sqrt{3x+1}+4$. Найдите c, где c — среднее арифметическое корней уравнения.

4. $\sqrt{x^2+(11+c)x+36}=x^2-36$. Найдите d, где d — модуль разности корней уравнения.

5. $2x^2-5\sqrt{2x^2+3x+d-4}+3x+3=0$. Найдите e, где e — сумма корней уравнения.

6. $\sqrt{3x-2}+2e+\sqrt{x-1}=0$. Найдите f, где f — среднее арифметическое корней уравнения.

7. $\sqrt{6-x-x^2}-\sqrt{x^2+x-f+1}=1$. Найдите g, где g — сумма корней уравнения.

8. $\sqrt{x+1-g}-\sqrt{2x-3}=\sqrt{4x-7}$. Найдите h, где h — сумма всех целых корней уравнения.

9. $\sqrt[3]{x+2-h}-\sqrt[3]{12(x-1)}+\sqrt[3]{2x-3}=0$. Найдите k, где k — среднее арифметическое корней уравнения.

10. $\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x+k+3\sqrt{2x-5}}=7\sqrt{k}$. Найдите m, где m — наибольший корень уравнения.

11. $2x-\sqrt{x-5}\left(\sqrt{x+m-8}+3\right)=m-11$. Найдите n, где n — наименьший корень уравнения.

12. $\sqrt{x^3+89}-\sqrt{x^3+n}=3x+n+5$. Найдите p, где p — сумма всех корней.

Обратите внимание на вопросы в каждом задании. Требуется не просто решить уравнение, а еще и что-то найти: сумму корней, наименьший корень и т.д. Такие вопросы учат детей внимательно читать задание и отвечать точно на тот вопрос, который был задан. Весьма важный навык, особенно с учетом выпускных экзаменов в тестовой форме, где цена неверно прочитанного вопроса — целое задание!

Покажем и командную игру, в которой требуется не только умение решать задачи, но и отлаженная работа в команде. Игра называется «Квартет». Чем-то она похожа на знакомую многим «Математическую регату», но есть и отличия. Итак...

«Квартет»

Играют команды по 4 человека. В каждом туре командам предлагается по четыре задачи. Через 10–15 минут (в зависимости от номера тура, на последние — больше времени) команды сдают только ответы к задачам соответствующего тура (без решений!). Если все 4 ответа правильные — 6 очков. Но если хотя бы один неверный, то за него минус 1 очко, а за каждый верный — плюс одно. Если ответ по какой-то задаче не сдан, то за нее — 0 очков.

Чему учит эта игра? Во-первых, аккуратности в выкладках. Так как оценивается только ответ, то любая мельчайшая описка сразу влечет потерю баллов. Во-вторых, команда должна грамотно распределить задачи между членами, ведь одному такие 4 задачи за 10 и даже 15 минут решить весьма проблематично. Требуется также отладка взаимной проверки, чтобы отлавливать ошибки. Наконец, очень важно, чтобы команда принимала решения: сдавать ли ответ к задаче, в которой они не уверены, или нет? В-третьих, игра может развить и интуицию. В некоторых, особенно геометрических задачах ответ можно угадать — а больше ничего и не требуется! Впрочем, снова встает вопрос: стоит ли рисковать.

Конечно, слишком часто такую игру проводить не стоит, чтобы дети не разучились грамотно оформлять свои решения. Но, с другой стороны, такой формат, как уже было сказано, развивает аккуратность и внимание к мелочам, а кроме того, учитель успевает в одиночку проверить первый тур у всех команд, пока они решают второй. Согласитесь, если писать все решения, то проверить все одному в процессе игры нереально, а тогда теряется игровой азарт — это же так здорово, когда результаты видны сразу, в реальном времени! Приведем пример одного из «Квартетов» для 10-го класса (впрочем, играть в него можно начиная с пятого).

10-й класс

I тур. Модули

(*10 мин.*)

Решите неравенство **(1–2)**.

1. $\left(2x^2+|x|-15\right)\sqrt{7-x^2}\le 0$.

2. $|x^2-3x-3|\ge|x^2+7x-13|$.

Решите уравнение **(3–4)**.

3. $\frac{x^2-4x+4}{x^2-6x+9}+\frac{x-2}{x-3}-12=0$.

4. $\left|\sqrt{x-3}-1\right|+\left|\sqrt{x+5}-1\right|>2$.

II тур. Стереометрия
(*10 мин.*)

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $M \in [A_1B_1]$, $AB = 8\sqrt{3}$. Найдите:

а) MC;
б) $\rho(M;\ B_1BD)$;
в) $\rho(M;\ C_1AC)$;
г) $\rho(M;\ B_1AD_1)$.

III тур. Тригонометрия
(*15 мин.*)

1. Упростите: $\dfrac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}$.

2. Дано: $\sin 2\alpha = -\dfrac{1}{7}$; $\dfrac{3\pi}{2} < 2\alpha < 2\pi$.

Найдите $A = \dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$.

3. Упростите: $\sin 20° + 2\sin 40° - \sin 100°$.

4. Решите уравнение $\sin\dfrac{2\pi x}{x^2+1} = 0$.

IV тур. Разные задачи
(*15 мин.*)

1. Найдите число целых решений неравенства

$$\frac{1}{2-x} > \frac{1}{\pi}.$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 3, \\ x^2 + 2xy - 2y^2 = 6. \end{cases}$$

3. Решите неравенство

$$\sqrt[4]{x-2} + \sqrt{x-3} > \sqrt{2-\sqrt[4]{x}}.$$

4. Решите уравнение

$$3x + 4[x] = 5\{x\} + 6.$$

V тур. Планиметрия
(*20 мин.*)

1. Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон выпуклого четырехугольника, равны между собой. Найдите площадь этого четырехугольника, если его диагонали равны 8 и 12.

2. Средняя линия трапеции равна 4, углы при одном из оснований равны 40° и 50°. Найдите основания трапеции, если отрезок, соединяющий середины оснований, равен 1.

3. В треугольнике ABC $AB = 2$, $AC = 4$, $AM = \sqrt{7}$ — медиана. Найдите синус или косинус угла BAC.

4. Найдите площадь треугольника, медианы которого равны 3, 4 и 5.

Что ж, вот и полугодие подошло к концу. Самое время для раздачи призов! Конечно, пятерки и штрафы мотивируют ребят в течение полугодия, но не менее интересно соревноваться друг с другом! У кого больше всех очков за четверть? Кто был лучшим на спецкурсе? Кто получил больше всех звездочек (а звездочка, напомним, ставится тому, кто выполнил все дополнительные задания к уроку)? Наконец, кто победил в общем зачете?

Раз в полгода проводится большое награждение — книжками, настольными играми и другими приятными и полезными призами. Рейтинг внутри класса есть сумма нескольких номинаций:

1) количество «5» по алгебре и геометрии (сумма);
2) количество задач, решенных на спецкурсе;
3) средний балл по алгебре;
4) средний балл по геометрии;
5) количество «*».

Обычно награждается половина класса. Скажем, в классе 26 человек, тогда берется 13 призовых мест по каждой номинации: I место — 13 очков, II — 12 очков, ..., XIII — 1 очко. Далее эти очки суммируются — и получается рейтинг.

Покупаются книги (или другие призы), учитель рассказывает о книгах (мы считаем важным, чтобы это была художественная литература, впрочем, можно выбирать призы по своему желанию), затем выходит тот, кто выиграл рейтинг, и *первым* выбирает приз. И так далее. Так, по крупицам, удается увеличить престиж тех, кто хорошо учится.

Мы убеждены, что данная система способствует повышению мотивации у учеников. Задачи, которые мы предложили в качестве примеров, разумеется, сложны для среднестатистического школьника, однако не они являются главными: можно понизить сложность, оставив главное — систему.

Конечно, мы понимаем, что нет и не может быть универсальных систем, неизменно приводящих к успеху. И все же мы надеемся, что для некоторых из вас эти идеи окажутся полезными.

И последнее. Однажды на серии уроков, которые проводились по этой системе, побывал замечательный учитель Борис Германович Зив. Ему понравилась активность детей и многое другое. Однако он сказал: «Все это немного напоминает цирк, кормление диких зверей. Ты разбрасываешь очки, как кусочки мяса, и звери делают то, чего хочет укротитель».

Иногда. Если получится...

Мы будем рады любым комментариям и откликам на нашу статью.

Е. ХАНИНА,
г. Москва

Фото автора

КАК АКТИВИЗИРОВАТЬ УЧЕБНУЮ РАБОТУ УЧАЩИХСЯ

На Всероссийском съезде учителей математики, который состоялся в октябре 2010 года, было подчеркнуто, что математическое образование есть важнейший и необходимый компонент развития личности, представляющий собой не только способ общения и взаимодействия с окружающими, но и основу подготовки к будущей профессии, интеллектуального и творческого развития, понимания законов мировоззрения.

Математика обладает колоссальным воспитательным потенциалом: воспитывается интеллектуальная честность, критичность мышления, способность к размышлениям и творчеству. Обучение математике в школе надомного обучения носит многогранный характер.

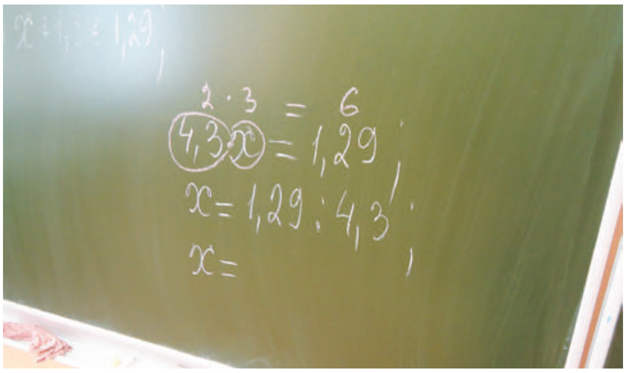
Средняя общеобразовательная школа «Школа надомного обучения» — тип государственного общеобразовательного учреждения, реализующего общеобразовательные программы начального общего, основного общего и среднего (полного) общего образования и обеспечивающего лицам с ограниченными возможностями здоровья возможность получения в условиях, адекватных их физическим особенностям, образования в пределах государственных образовательных стандартов, а также социальную адаптацию и интеграцию в обществе. В «Школу надомного обучения» принимаются дети на основании заключения психолого-медико-социальной комиссии и по направлению органов управления образованием. (Закон № 14 от 10.03.2004 г. «Об общем образовании в г. Москве». Статья 7.)

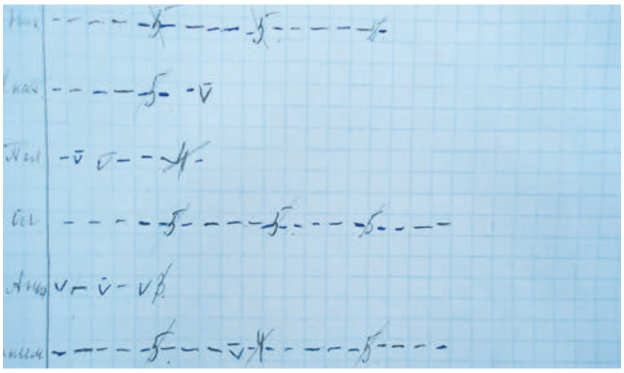
Форма учебно-воспитательного процесса определяется школой в соответствии с медицинскими показаниями и может быть:

– классно-урочной (при наличии 8 человек одного класса);
– групповой (до 4 человек);
– индивидуальной (для некоторых детей в соответствии с их заболеваниями).

Занятия могут организовываться как в школе, так и на дому у ребенка.

Важным условием правильной организации учебно-воспитательного процесса является выбор учителем рациональной системы методов и приемов обучения, с учетом возраста учащихся, уровня их математической подготовки, развития общеучебных умений и специфики заболевания. В связи с этим учителю необходимо реализовать сбалансированное сочетание традиционных и новых методов обучения, оптимизировать использование техниче-





ских средств; создать максимально благоприятные условия для умственного, нравственного, физического и эстетического развития личности, ее самореализации и самоопределения; вносить в урок элемент успеха для каждого школьника.

В своей работе я использую различные приемы. Остановлюсь на тех, которые чаше всего применяю на своих уроках, так как они позволяют разнообразить учебную деятельность, повысить интерес к предмету, развивают память, а главное, создают благоприятный психологический климат на уроке, что немаловажно для таких детей.

1. Трудно контролировать качество коротких ответов учащихся, даже несмотря на то, что в школе надомного обучения в классе 8 человек, а в группе 2–4. Поэтому использую метод «*прозрачности оценок*», или «*ведение ведомости*». Эта ведомость заполняется учениками самостоятельно с комментариями учителя. Каждый ответ оценивается значком, и каждый ученик видит и слышит, как оценен его ответ. Я использую такие значки, а вы можете выбрать свои:

« – » — отличный ответ;

«$_{v}^{-}$» — хороший ответ;

«v» — удовлетворительный;

«$_{v}^{+}$» — не очень удовлетворительный;

«+» — ответ плохой или отсутствует (стараюсь ставить в крайнем случае).

За пять коротких ответов можно поставить оценку. Причем ее можно фиксировать нежестко, тогда у учителя есть резерв «похвалить» ученика.

Например:

за такой набор – – $_{v}^{-}$ – – ставлю «5» или «4»;

а за такой $_{v}^{+}$ – v – v ставлю «3».

Этот прием включает ученика в процесс выставления оценки, повышает у него мотивацию ответа и в какой-то степени вносит элемент соревновательности. Если ответ подробный, полный, то его можно оценить не одним значком, а двумя-тремя. Всегда надо стремиться поощрить ученика, тогда ребенок будет стремиться отвечать как можно чаще. Значок, символизирующий плохой ответ, использую как можно реже. Бывает, что ребенок не любит выходить к доске, а этот прием позволяет добиться желания отвечать и выходить к доске. Со временем некоторые учащиеся даже обижаются, что их мало спрашивают. Так я оцениваю устную работу, активную проверку домашней работы в классе и активность на уроке.

2. Отработка вычислительных навыков утомительна для учащихся, поэтому при повторении таких тем, если задание выполнено полностью и хорошо, ставлю «+», а если была допущена ошибка, то ставлю «+ –» или «– +», в зависимости от ошибки. Этот прием хорошо применять и в группе, и при индивидуальной форме обучения. А значки лучше записывать на доске, а в конце работы выставить соответствующую значкам отметку. Ученик, видя свои очки, может и сам поставить себе оценку, а учитель, в зависимости от ситуации, добавить балл.

3. В начале учебного года в качестве домашнего задания я прошу пятиклассников написать небольшое *сочинение на тему* «Математика в профессии моих родителей». Это позволяет мне поближе узнать своих учеников и немного познакомиться с их родителями.

4. Еще один прием — это работа *с сигнальной карточкой*. Прием этот достаточно старый, но, на мой взгляд, он не потерял актуальности. Итак, ученики делают себе карточку из картона размером с открытку (кстати, карточка служит многим и как закладка, что экономит время в начале урока): с одной стороны — красная бумага, с другой — синяя. При правильном ответе товарища карточка поднимается красной стороной, а если ответ неверный, то синей. Что этим достигается? Во-первых, осуществляется обратная связь с классом (что очень важно). Во-вторых, повышается внимательность, так как надо следить за ответами своих товарищей и не отвлекаться. А за помощь в проверке ставится дополнительный балл в ведомость, о чем уже было сказано. В-третьих, вырабатывается привычка к постоянной работе на уроке.

5. В программе 5-го класса большое значение уделяется выработке прочных вычислительных навыков, которые основываются на четком по-

нимании учащимися алгоритмов и приемов вычислений. Для эффективности усвоения применяю *проговаривание алгоритма* вычисления при каждом выполнении вычислительных действий, будь то работа у доски или ответ с места (форма комментированного ответа). Этот метод я постоянно использую на своих уроках — и при закреплении нового материала, и при повторении пройденного, и при проведении самостоятельных работ. Это развивает речь учащихся, помогает запомнить правило или алгоритм до автоматизма. А также помогает ученику чувствовать себя более уверенно на уроке.

В 5-м классе учащиеся знакомятся с обыкновенными и десятичными дробями и, естественно, должны научиться правильно их читать и записывать. Для этого я применяю следующий прием: один ученик диктует пример, а другой записывает его на доске. И так по очереди, по кругу. Так отрабатывается, во-первых, навык чтения дробей, а во-вторых, навык записи дробей. Этот прием позволяет довести эти навыки почти до автоматизма.

6. *Самостоятельная работа с поддержкой* или под контролем. Этот прием позволяет быстро выявить и устранить пробелы в понимании учеников. А проводится эта работа следующим образом: один ученик, выполняя задание самостоятельно, диктует все, что пишет, и при этом должен проговаривать основные алгоритмы (правила), которые встречаются в решении. Другие ученики следят за решением и при ошибке должны отреагировать.

Если работа в классно-урочной и групповой формах схожа более-менее с работой в классе обыкновенной школы, то работа с учеником на дому или в школе индивидуально требует совершенно другой методики. Вы, возможно, скажете: что там такого сложного работать с одним учеником индивидуально. Но, как правило, особенности состояния здоровья учащегося и ряд его заболеваний требуют нестандартных приемов обучения. Чаще всего дети поступают в «Школу надомного обучения», имея большие проблемы в знаниях, с отставаниями в прохождении программ. Кроме этого, у них, как правило, наблюдается быстрая утомляемость, слабая память, плохо развита речь, иногда присутствует заикание и пониженная способность к обучению арифметике.

Пониженную способность к обучению арифметике или неспособность к ней называют дискалькулией. Дети, страдающие дискалькулией, не понимают смысла чисел: их мозг не может установить соответствие между числом и его величиной (представлением о количестве). Например, нормальный ребенок сразу видит, какая из двух игральных карт старше — «пятерка» или «восьмерка». Страдающему дискалькулией, чтобы это понять, приходится пересчитывать значки на обеих картах.

Данный синдром проявляется при следующих симптомах:

– Неспособность к быстрому распознаванию количества предметов в поле зрения. Например, человек не понимает, что на столе лежат 3 книги, пока не пересчитает их по одной.

– Наличие сложностей при вычислениях с помощью цифр. Например, страдающему дискалькулией трудно понять, почему $3 + 3 = 6$.

– Наличие сложностей с отсчетом времени. Например, подобные люди всегда опаздывают на запланированные встречи.

– Наличие сложностей с координацией движений.

В основе дискалькулии лежит неспособность «с первого взгляда» (без пересчета) оценивать количество объектов в множествах.

Между тем, по имеющимся (конечно, весьма условным) оценкам, дискалькулией страдает примерно 5–7% детей. Американские социологи считают, что низкая математическая грамотность населения дорого обходится обществу. Они рассчитали, что если бы удалось подтянуть 20% самых «математически отсталых» американцев до первого (минимально приемлемого) уровня по стандарту, то это привело бы к дополнительному приросту ВВП на 0,74% в год. Я не думаю, что по качеству школьного образования, в том числе математического, ситуация лучше.

В последние годы мы сильно отстает от Америки.

Расскажу, как я работала с ученицей N, которая поступила в 5-й класс «Школы надомного обучения» в 2009 году.

Медицинская характеристика ученицы N (08.03.97 г.р.). Врожденный порок развития спинного и головного мозга, миелодисплазия, spina bifida, состояние после оперативного лечения, плоско-вальгусная деформация обеих стоп, торсионная деформация костей голеней, синдром «натянутого спинного мозга», нижний парапарез с нарушением функции тазовых органов по типу недержания (энурез, энкопрез), синдром мышечной атрофии, нейрогенный мочевой пузырь, пузырно-мочеточниковый рефлюкс, синдром внутричерепной гипертензии, долихосигма, мегаректум, ДЖВП, атопическая бронхиальная астма, аллергический ринит, двухсторонняя сенсоневрологическая тугоухость, синдром вегетодистонии по симпатикотоническому типу с гипертоническими кризами, головная боль напряжения, носовые кровотечения, МАРС (ДТЛЖ) ПАО клапана и МК I степени.

Психолого-педагогическая характеристика ученицы N (08.03.97 г.р.). Трудности усвоения учебного материала, низкий уровень учебной мотивации; работоспособность низкая, быстрая утомляемость; концентрация внимания снижена; сужен объем слухоречевой памяти, затруднено опосредованное запоминание; послоговое чтение, затруднено понимание текста; трудности в выполнении математических операций; несформированность эмоционально-волевой сферы; слабо развиты мелкие мышцы пальцев рук; общая моторика развивается постлогично на фоне основного заболевания.

По рекомендации медико-психолого-педагогической комиссии ученица N обучалась индивидуально. На первых же уроках выяснилось, что в силу ряда причин обязательный минимум содержания основной образовательной программы по математике начальной школы ей не был достигнут.

Ребенок, перейдя в 5-й класс, практически не считал. Она не могла найти и открыть страницу учебника с указанным номером.

На каждом уроке в течение двух лет (5–6-й классы) повторялись вычислительные операции, таблицы сложения и умножения, примеры решались вместе с учителем, проговаривая каждый шаг вычислений. Решая уравнения в 5–6-ом классах, работали с так называемой «шпаргалкой», наверное, этот прием знают многие. Но и этот прием сначала не пошел, пришлось и его «усовершенствовать» для данной ученицы. Сначала писали, конечно, с рассуждениями следующие соотношения:

$3 + 2 = 5$; $5 - 3 = 2$; $3 = 5 - 2$;
$5 = 3 + 2$; $2 = 5 - 3$; $3 = 5 - 2$.

Далее приступали к решению уравнений с использованием шпаргалки.

Например: решить уравнение $(x + 15) - 8 = 17$.

Начиналось все с наводящего вопроса: «Какое последнее действие?»

Выделяем его, рисуем листочки.

$$(x + 15) \quad - \quad 8 \quad = 17$$

Находим соответствующее равенство в шпаргалке: $5 - 3 = 2$.

Какой листок ищем? Какое число в шпаргалке ищем? Как найти 5 по нашей шпаргалке?

Работая все время с наводящими вопросами, добиваемся того, чтобы ученик сам решал уравнения, пусть по шпаргалке, пусть с наводящими вопросами, но делал это сам.

Работая над темой «Сложение и вычитание положительных и отрицательных чисел», с этой девочкой я использовала прием «двух вопросов» (естественно, по мере возможности к нему подводила), мы задавали два вопроса: «Какие знаки?» и «Что делаем?»

На первый вопрос мы отвечали, что знаки одинаковые или разные (при необходимости использовали цветные карандаши). На второй вопрос, в зависимости от знаков, отвечали: «Если знаки одинаковые, то складываем и ставим знак большего модуля. Если знаки разные, то из большего вычитаем меньшее и ставим знак большего модуля». Я говорю «мы» (во множественном числе), потому что я работала с ней вместе. Задавала вопросы и отвечала на них вместе с ней, делая это на каждом примере, до тех пор, пока она, усвоив правило, уже сама не выполняла данные операции. Повторяя как попугай эти фразы, я добилась желаемого.

В результате работы не только одного человека, но и всего психолого-педагогического коллектива девочка была переведена в 8-м классе в группу и продолжает обучение в групповой форме.

Учитель должен строить урок, отталкиваясь от возможностей ребенка, и основной задачей обучения должно являться формирование навыков умственного труда. Одним из главных условий успешного обучения и больных, и здоровых детей является создание благоприятного психологического климата, присутствие положительных эмоций на уроке. Немалую роль здесь играет доступность и посильность заданий. Контрольные работы тоже должны быть составлены индивидуально, чтобы любой ученик мог получить положительную оценку. Не надо упускать любой возможности, чтобы похвалить ученика, даже за самую малость.

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ЗАДАЧ

А. ХРУСТАЛЕВ,
г. Севастополь

Встречаются задачи, содержащие избыточные данные, которые могут быть и противоречивыми, поэтому исследование условия на противоречивость или непротиворечивость является необходимым элементом решения такой задачи. Подтвердим это на примере решения задачи из пособия [1] и популярного сборника задач по математике для поступающих во втузы [2].

Задача 1. Существует ли такое двузначное число, которое при делении на сумму квадратов его цифр дает в частном 2 и в остатке 6, а при делении на произведение его цифр дает в частном 4 и в остатке 6?

Решение этой задачи под номером 1064 приводится в [1, с. 280], где указан ответ: 22. В действительности не существует двузначного числа, удовлетворяющего условию задачи 1, что подтверждает проверка!

Отметим, что выдача результатов решения прикладной задачи часто связана с моральной, материальной или юридической ответственностью. Поэтому на всех этапах решения с целью предотвращения ошибок необходимо использовать все возможные методы контроля. И именно поэтому проверке решений даже учебных задач следует уделять большое внимание.

Покажем, что информация «двузначное число, которое при делении на сумму квадратов его цифр дает в частном 2 и в остатке 6» лишняя, то есть решим задачу, отражающую ее подлинное содержание:

Существует ли двузначное число, которое при делении на произведение его цифр дает в частном 4 и остатке 6?

Обозначив через x и y соответственно число десятков и число единиц двузначного числа, для нахождения неизвестных получим уравнение $10x + y = 4xy + 6$, где $1 \le x \le 9$, $1 \le y \le 9$, x, y — натуральные числа, причем y — четное, $y \ne 0$.

Из уравнения следует, что

$$x = \frac{6-y}{10-4y}. \qquad (1)$$

Итак, y равно 2, 4, 6 или 8. Проверка показывает, что только при $y = 2$ натуральное число $x = 2$ принадлежит интервалу $1 \le x \le 9$. Следовательно, *возможным* ответом к задаче является число 22. Но проверка по тексту задачи показывает, что число 22 переформулированному условию не удовлетворяет, тем более оно не удовлетворяет условию задачи 1, то есть двузначного числа, о котором идет речь в задаче, не существует.

Задача 2. Имеются три положительных двузначных числа, обладающих следующим свойством: каждое число равно неполному квадрату суммы своих цифр. Требуется найти два из них, зная, что второе число на 50 единиц больше первого [5, с. 344].

Прежде всего отметим, что информация о существовании трех двузначных чисел лишняя.

Будем решать переформулированную задачу:

Требуется найти два положительных двузначных числа, обладающих следующим свойством: каждое число равно неполному квадрату суммы своих цифр, зная, что одно из них на 50 единиц больше другого.

Общая формула двузначного числа: $10x + y$, где x и y — цифры: $1 \le x \le 9$, $0 \le y \le 9$. Из условия следует, что $10x + y = x^2 + xy + y^2$, то есть

$$x^2 + (y - 10)x + y^2 - y = 0. \qquad (2)$$

Запишем дискриминант для уравнения (2): $D = 100 - y(16 + 3y)$, который при $y \ge 4$ принимает отрицательные значения. При $y < 4$ $D > 0$, а потому существуют вещественные решения уравнения (2). Проверка показывает, что при $y = 1$ $x = 9$, при $y = 3$ $x = 1$ или $x = 6$. При $y = 0$ и $y = 2$ соответствующие значения x не удовлетворяют условию задачи.

Следовательно, существуют только три положительных двузначных числа: 91, 13 и 63, удовлетворяющих уравнению (2), а два из них удовлетворяют и условию $63 - 13 = 50$. Итак, 13 и 63 — искомые числа.

Неизвестные x и y при решении этих задач можно найти, используя информационные технологии, но исследования переопределенных задач несут развивающую функцию, поскольку требуют умения анализировать условия и находить рациональные и оптимальные решения.

Литература. 1. *Зак С.М.* Все домашние работы к учебнику: Ю.Н. Макарычев и др.: Алгебра, 9 класс. Учебник для общеобразоват. учреждений (2013). — М.: ЛадКом, 2014. 2. Сборник задач по математике для поступающих во втузы / под ред. М.И. Сканави. — М.: Мир и образование, 2013.

А. ОСТАПЕНКО,
ost101@mail.ru,
г. Краснодар

ОТ ФРАГМЕНТА К СИСТЕМЕ

■ С профессором В.В. Гузеевым мы неоднократно писали о том, что процессы усвоения знаний и освоения умений имеют разную психологическую природу. Так, оптимально если *усвоение знаний будет осуществляться концентрированно во времени и системно* (от общего к частному) *по структуре содержания. Освоение же умений природосообразно вести распределенно во времени и фрагментарно* (от частных умений к общим) *по содержанию* — от простых навыков к сложным.

Содержание школьной математики предполагает и усвоение знаний (и представлений), и освоение навыков (и умений). Причем *в содержании начального математического образования явно преобладают умения и навыки, а в старших классах — знания и представления*. Так, после начальной школы ребенок по преимуществу должен *уметь* считать, складывать, вычитать, умножать, делить, что-то решать. А старшеклассник уже должен *знать* аксиомы, теоремы, правила и формулы. Соотношение между объемами усваиваемых математических знаний (представлений) и навыков (умений) с возрастом смещается к преобладанию первых. Если в начальной школе преобладают тренинговые процессы нарешивания, то у старшеклассников доминируют процессы осмысления. Соответственно изменению этого соотношения *должна изменяться и организация математического образования*: от фрагментарности к системности, от распределенности во времени к концентрированности.

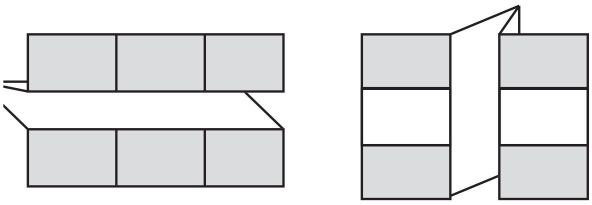
Должна-то должна, но не тут-то было! Структура урока математики в старшей школе мало чем отличается от структуры урока в начальной школе. Разве что сложностью заданий. Старшеклассников все также учим «понемногу чему-нибудь и как-нибудь». Все то же линейное попараграфное изложение учебного материала с последующим обобщением фрагментарных знаний.

Можно ли себе представить изучение химии без начального ознакомления с периодической системой Д.И. Менделеева? Можно ли допустить мысль, чтобы учитель, начиная преподавать курс физической географии, не показал глобус и карту мира? А вот математики почему-то могут! Хотя совершенно очевидно, что изучение системных курсов алгебры и геометрии (а не начальной арифметики) должно начинаться с изучения *системного ядра предмета*, которое впоследствии должно постоянно «маячить» перед глазами и «держать» целое. Но, увы, в школьной математике это наглядное ядро (этот «глобус») практически никто не разрабатывал (разве что академик П.М. Эрдниев). В привычных комплектах школьных таблиц по математике преобладают фрагментарные сведения (формулы сокращенного умножения, таблицы синусов или косинусов, etc.) Содержание математического образования старшей школы попараграфно «нашинковано на мелкой терке», а учебное время раздроблено поурочно так же, как и у первоклассников. Итог очевиден — отсутствие целостности и системности в видении мира и математическом его описании. Повсеместный переход на тестовые формы контроля эту ситуацию только усугубляет.

Однако еще памятен опыт конспектно-системной наглядности учителя Шаталова и опыт укрупнения математических знаний академика Эрдниева. Оба и поныне работают (первый в Донецке, второй в Элисте), но почти забыты учительством на всем постсоветском пространстве. А между тем их опыт и опыт их последователей давали высокие результаты системности математического образования. Если соединить воедино опыт создания опорных конспектов как образной наглядности В.Ф. Шаталова [1] (а он создавал конспекты, не укрупняя материал) и опыт укрупнения дидактических единиц П.М. Эрдниева [2] (а он особо не был озабочен созданием образной наглядности), а потом полученный дидактический «гибрид» укрупненного опорного конспекта умножить опытом создания многомерных дидактических структур В.Э. Штейнберга [3], то мы получим стройную педагогическую ***технику графического сгущения*** (уплотнения, концентрации, компрессии) ***учебных знаний*** как часть нового направления в педагогике — дидактического дизайна [4]!

Эта техника графического сгущения состоит из трех этапов: кодирования (почти по Шаталову), укрупнения (почти по Эрдниеву) и структурирования (отчасти по Штейнбергу). Все приемы этой техники многократно описаны [5]. Главное состоит в том, что эта техника позволяет создавать графическую опорную крупномодульную наглядность, позволяющую держать «перед глазами» содержательное ядро целого курса либо большого его раздела. Пример таблично-матричная модель по теме «Объемы и площади боковых поверхностей фигур». Целостное и системное преподавание этой темы можно обеспечить с помощью применения крупномодульной наглядности, охватывающей несколько параграфов школьной геометрии.

Пунктиром на рисунке изображены линии сгиба. Так, при горизонтальном складывании мы можем изучать только объемы, а при вертикальном — только площади.

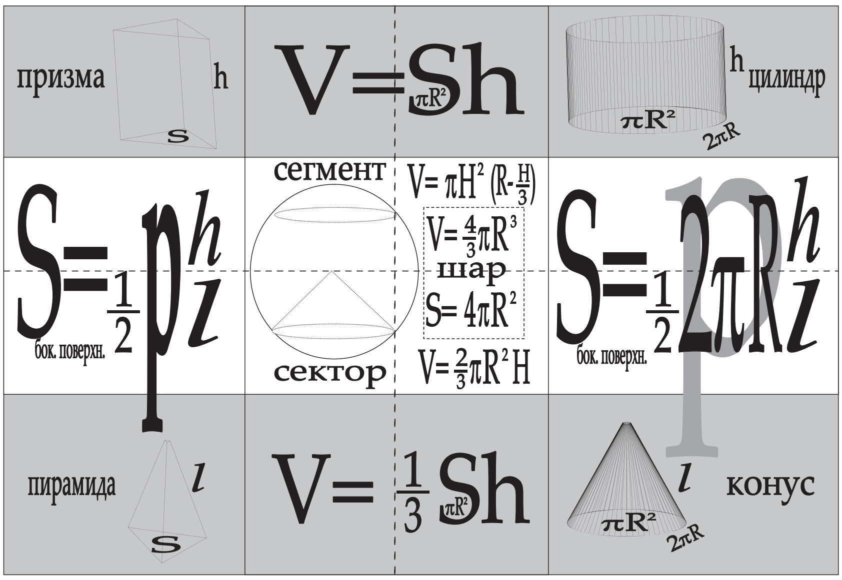


При полной развертке таблицы видны все темы раздела.

Эта опора может использоваться как учителем в плакатном формате А1, так и учеником в формате А4 или А5. Ее использование удобно как при объяснении нового материала, так и при его обобщении. При этом следует заметить, что эффективность применения такого типа наглядности при изложении новой темы в начале изучения раздела, естественно, выше, чем в конце изучения при обобщении.

Однако еще раз заметим, что описанные приемы работают только при наличии учителя, способного работать с подобной наглядностью и обладающего системным математическим мышлением. Именно учитель своей внутренней увлеченностью может «зарядить» такие таблицы зримой мыслью, в противном же случае безразличный взгляд ученика оставит и их без внимания.

Описанный подход многократно успешно апробирован, в частности, в Азовской гимназии Краснодарского края. А подобная наглядность детально разработана как для математики, так и для других дисциплин [6].



Литература

1. *Шаталов В.Ф.* Эксперимент продолжается. — М.: Педагогика, 1989. 2. *Эрдниев П.М.* Укрупнение дидактических единиц как технология обучения. В 2 ч. Ч. 1. — М.: Просвещение, 1992. 3. *Штейнберг В.Э.* Дидактические многомерные инструменты. Теория, методика, практика. — М.: Народное образование; Школьные технологии, 2002. 4. *Ткаченко Е.В., Манько Н.Н., Штейнберг В.Э.* Дидактический дизайн — инструментальный подход // Образование и наука, 2006, № 1. 5. *Грушевский С.П., Касатиков А.А., Остапенко А.А.* Техника графического уплотнения учебной информации // Школьные технологии, 2004, № 6. 6. *Грушевский С.П., Остапенко А.А.* Сгущение учебной информации в профессиональном образовании. Монография. — Краснодар: Кубанск. гос. ун-т, 2012.

КРУГОВАЯ ТЕТРАДЬ

СТАТЬЯ ИЗ ЖУРНАЛА «РУССКАЯ ШКОЛА», № 1 ЗА 1904 Г.

Во многих французских школах введены cahiers de ronlement, то есть *катящиеся* или *передвижные* тетради; на первой странице этих тетрадей печатается эпиграф: «Прогресс посредством соревнования», и они рассылаются в школы бесплатно, за счет общины или содержателей училища. По инициативе В.К. Потто — дочери известного педагога К.Д. Ушинского, такие тетради, под названием *круговых*, были применены в 1902/1903 учебном году в виде опыта в учрежденных госпожою Потто киевских училищах имени К.Д. Ушинского. По свидетельству учащих и заведующих этими училищами, *круговые тетради* оказались настолько полезными, важными и необходимыми, что в настоящее время решено употреблять их во всех классах названных училищ как отличное педагогическое средство.

Круговая тетрадь служит для всеобщего пользования учениками каждого класса или отделения, переходя от одного ученика к другому. Каждый ученик или ученица пользуются ею в течение лишь одного учебного дня, исполняя в ней все те письменные работы, какие в это время предлагает учитель классу. На следующий день круговая тетрадь передается следующему по алфавиту ученику и т.д., совершая в течение учебного года несколько круговых оборотов по всему классу. Таким образом, круговая тетрадь отличается от всякой другой ученической тетради тем, что она принадлежит целому классу или отделению и заключает в себе письменные работы всех учащихся, тогда как другие тетради представляют собой работу одного ученика и принадлежат только ему одному.

В день открытия занятий в школе, в начале учебного года, учитель, дает круговую тетрадь первому по алфавиту ученику, записав предварительно на первой ее странице фамилии учеников в алфавитном порядке. Получив тетрадь, ученик пишет на следующей странице вверху слева день, число и свои имя и фамилию, а также возраст и затем исполняет в тетради все письменные работы по мере того, как ему надо выполнять предлагаемые учителем уроки и упражнения. Каждый урок ясно отделяется от других соответствующим заглавием, например: *диктовка*, *списывание с книги*, *грамматическое упражнение*, *задача* и т.д., или же: *урок по истории*, *урок по географии* и проч., причем в последнем случае излагается учеником более или менее кратко содержание урока. По истечении дня ученик подписывается под своей работой и отдает тетрадь учителю для проверки и исправлений. На другой день второй ученик проделывает то же, затем третий, четвертый и т.д. до последнего, а потом тетрадь снова возвращается к первому ученику для нового кругооборота. Таких кругооборотов тетрадь в течение учебного года совершит несколько, чем больше — тем лучше.

Опыт применения круговой тетради в школе показывает, что она служит хорошим средством для поддержания в учащихся интереса к работе и совершенствованию в ее исполнении. Учителя подтверждают, что ученики считают за счастье писать в ней свои уроки и старательно следят за тем, чтобы не пропустить очереди. При исполнении работы в круговой тетради ученики удваивают свое внимание и всегда стараются возможно аккуратнее выполнять задаваемые уроки. Сверх этого, круговая тетрадь дает возможность учащимся, а в особенности ревизирующим отдавать себе скорый и верный ответ обо всем сделанном в классе, как-то: о способах и результатах преподавания, об успехах каждого ученика, в частности, и в особенности, об успехах целого класса. Один взгляд на работы в этой тетради уже дает возможность сразу узнать — точно ли учитель придерживается программы, есть ли последовательность в занятиях, и показывают ли разные ученики одинаковые успехи, и способны ли они к усвоению знаний по той или иной программе.

Круговая тетрадь — это своего рода автобиография класса, старательно составленная самим же классом; в нее день за днем внесены результаты прилежания, основанные не на способности одного ученика, а на успехах всего класса.

Такие блестящие качества и значение круговых тетрадей дают нам уверенность, что и наши русские школы вскоре последуют примеру французских школ и будут оставлять по себе богатый материал для будущего историка-педагога и для всех местных деятелей по народному образованию.

Т. ЛУБЕНЕЦ

Орфография и пунктуация современные. — ***Ред.***




Система критериального оценивания

ОЦЕНИВАЕМ ПРЕДМЕТНЫЕ КОМПЕТЕНЦИИ

УРОК РЕФЛЕКСИИ В ГРУППОВОЙ ФОРМЕ

О. ГРИГОРОВА,
А. ЕВСЕЕВА,
М. ЗОТОВА,
drakosha976@yandex.ru,
г. Москва,
фото предоставлены авторами



В обсуждении принимает участие главный редактор журнала "Школьный психолог", кандидат психологических наук, доцент МГППУ М. Чибисова.

Видеомастер-класс по созданию урока-проекта для учащихся 6-го класса по теме «Симметрия в координатах» вы можете посмотреть ВКонтакте по ссылке: https://vk.com/video17555327_171249350.

Видео с урока-проекта «Азбука графиков»: https://vk.com/video17555327_171213853 .

Видеофрагмент с урока-тренинга в 7-м классе можно посмотреть по ссылке: https://vk.com/video17555327_170091570.

Нас изначально учили, что целей у урока три: обучающая, развивающая и воспитательная. Но сегодня изменился взгляд на эти цели. Обучающая цель расширилась от узких предметных умений до метапредметных компетенций, развивающая — от умений применять новые знания до компетенций рефлексивных, позволяющих оценивать не только итог деятельности, но и себя в процессе работы, а воспитательная — от умений контролировать свое поведение до компетенций сотрудничества.

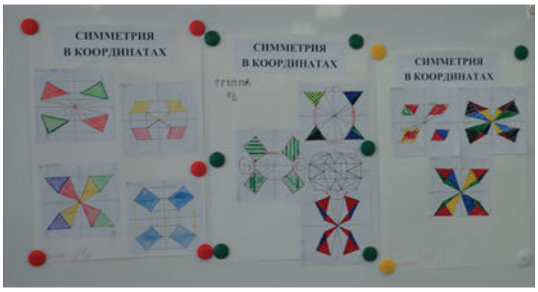
Важно, чтобы ребенок был заинтересован в той деятельности, которой он занимается, осознавал важность получения знаний, умел ставить цели, формулировать задачи для их достижения, анализировать свою деятельность и себя в ней, оценивать свои успехи, находить свои ошибки, определять причины и пути их устранения. Поэтому ученик в процессе обучения должен быть субъектом, а не объектом учебной деятельности. Его надо не только учить учиться, но и учить осознавать личную ответственность за результаты обучения.

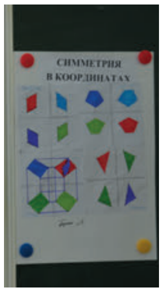
В процессе обучения учитель должен опираться на индивидуальные особенности школьника, а для этого надо изучать личность каждого ученика, его взаимоотношения с одноклассниками. И одной из первых задач современного образования является не что иное, как социальная адаптация ученика в коллективе.

Хорошими помощниками в реализации таких сложных задач, как вовлечение ребенка в процесс учения, развитие его коммуникабельности, являются групповые уроки. Чаще всего мы используем два типа групповых занятий: урок-проект и урок-тренинг. Рассмотрим построение этих уроков и покажем, как вписывается в них критериальная система оценивания.

Для урока-проекта, как и для урока-тренинга, в сложившейся у нас системе характерна так называемая ролевая игра: весь класс разбивается на группы, а каждый ребенок в группе выполняет

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru (Лист планирования.)





определенную роль. Чтобы процесс обучения в групповой форме был понятен детям, мы строим такие уроки по устоявшейся схеме. Группа обычно состоит из 5–6 человек, это оптимальное количество для ролевого сотрудничества. Сразу представим инструкцию для работы в группе.

Памятка участника группового проекта

1. Группа состоит из 5–6 человек.

2. Группа распределяет роли (заполняется таблица ролей).

Руководитель: координирует работу группы, следит за выполнением ролевых функций участниками, отвечает за следование плану, заполняет лист планирования и продвижения по заданию, следит за заполнением листов самооценки (в конце работы).

Контролер: контролирует полноценную работу каждого участника группы, отвечает за составление плана работы и соответствие этому плану, следит за записями и другими видами работы участников групп. Собирает и сдает все нужные бумаги (тетради) в конце занятия.

Советник: может обратиться за помощью к преподавателю или участникам других групп.

Теоретик (докладчик): отвечает за теоретический материал, необходимый для реализации данного проекта, координирует работу участников группы с литературой, Интернетом и другими источниками информации. Представляет проект.

Оформитель: отвечает за оформление проектной работы (создание презентации, буклета, плаката или любого другого продукта проектной работы).

3. Чтение текста задания.

4. Обсуждение темы и формы представления результата (плакат, презентация, буклет, ... ваш вариант).

5. Составление плана работы. (*Заполняется лист планирования.*)

6. Выполнение задания.

7. Контроль продвижения по плану. (*Лист планирования и продвижения по заданию.*)

8. Оформление результата работы.

9. Представление результатов.

10. Голосование за лучший проект.

11. Самооценка. (*Заполнение листа самооценки.*)

Количество ролей, их функции могут меняться в зависимости от урока. А задачи урока-проекта и урока-тренинга совершенно разные. Целью урока-проекта является получение некоторого продукта (плаката, видеоролика, макета и т.д.), а урока-тренинга — самостоятельное решение большого количества задач. И так как цели уроков различны, то и организация их разная, а также различно и критериальное оценивание в процессе урока.

Урок-проект

Создание урока начинается с идеи. Банк идей для проектных уроков мы начинаем создавать еще до начала учебного года, когда пишем рабочую программу. Сначала мы представляем, какой продукт можем получить в конкретной теме. Например, на уроке-проекте «Деление числа в данном отношении» для учащихся 6-го класса мы создавали аппликации из цветных геометрических фигур.

В теме «Симметрия в координатах» были созданы плакаты с видами симметрии, выполненные для пяти геометрических фигур.

В теме «Деление отрезка на равные части» дети создали видео процесса построения в программе «Живая математика».

В теме «Площади» сделали ролик с выводом формул.

После возникновения идеи мы прописываем задание для группы так, чтобы в нем четко и ясно описывался конечный продукт. Приведем два примера.

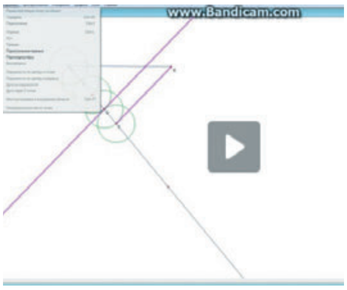
«Деление числа в данном отношении»

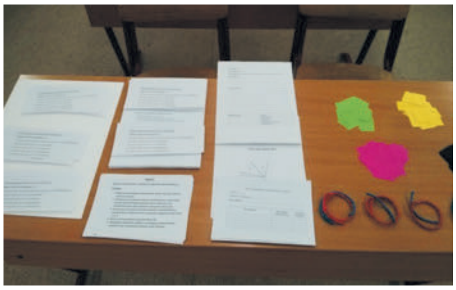
Задание. Сделать аппликацию из кусочков цветной бумаги синего, красного, зеленого и черного цветов. При этом должны соблюдаться следующие условия.

1. Отношение количеств кусочков бумаги по цветам должно быть таким же, как отношение длин веревочек соответствующих цветов (веревочки выдаются на уроке, их длины заранее просчитаны).

2. Всего кусочков бумаги должно быть 30.

Демонстрируя свою работу, объясните, почему и как получилась именно такая картина.




«Симметрия в координатах»

Задание. Создать плакат по теме «Симметрия в координатах». Для этого каждый участник группы должен построить в своей системе координат фигуры, симметричные данной относительно: а) оси Ox; б) оси Oy; в) начала координат. Координаты исходных фигур вы получите вместе с заданием.

В конце работы следует красиво оформить плакат, написав на его лицевой стороне номер группы и фамилии участников, и подготовить защиту своего проекта. При защите необходимо рассказать о том, как строится центрально-симметричная фигура, как выполняется построение при осевой симметрии, какие сложности возникали в процессе работы, а также отметить тех участников группы, кто помогал другим справиться с заданием.

Далее составляем план контроля над процессом работы групп, так как на уроке-проекте важны и целеполагание, и планирование, и четкое следование ролевой функции. И вот на этом этапе нам помогает система критериального оценивания, которую мы описываем в наших статьях. Оценивание деятельности удобно представить в виде таблицы, содержащей те этапы урока, которые мы считаем необходимым оценить. Таблицу по ходу работы заполняет ученик-контролер.

Приведем пример таблицы оценивания с урока «Симметрия в координатах».

Таблица помогает детям не пропускать этапы работы, а также стимулирует их к качественной деятельности на уроке. А нам, учителям, она помогает видеть весь процесс работы групп. Для контролера таблица — рабочий инструмент при выполнении своей роли.

После того как критерии сформулированы, задание написано, готовим материал, который понадобится для выполнения работы.

На заключительном этапе подготовки урока-проекта мы продумываем, как будут формироваться группы. Группы могут быть составлены из учеников:

- одного уровня обученности, если мы готовим задания нескольких уровней сложности;
- разных уровней обученности, если внутри группы необходимо организовать взаимообуче-

Оценочный лист «Симметрия в координатах»

Группа ______________________ Контролер______________________

Фамилия	Роль в группе	Задание (баллы)				Баллы за роль (0–2)	Всего баллов (до 14)	Оценка
		Построение фигуры (0 – 3)	Симметрия относительно					
			оси Ox (0 – 3)	оси Oy (0 – 3)	точки O (0;0) (0 – 3)			
	руководитель							
	контролер							
	советник							
	докладчик							
	оформитель							

Критерии оценивания участника группы:

3 балла — самостоятельно построил фигуру по данным координатам (*при оценке 1-го задания*), самостоятельно построил симметричную фигуру (*при оценке 2–4-го заданий*);

2 балла — попросил помощи вначале, но потом справился сам;

1 балл — допустил ошибку при нахождении координат точек;

0 баллов — не справился с заданием.

Критерии оценивания участника группы за роль:

2 балла — роль выполнил качественно и продуктивно, что привело группу к отличному результату;

1 балл — роль выполнил, но к отличному результату группу это не привело;

0 баллов — свою роль не выполнил.

Критерии выставления отметки:

12–14 баллов — «5»; 10–11 баллов — «4»; 7–9 баллов — «3».




ние, когда более сильный ученик помогает справиться с работой другим ученикам;

• случайным образом, например, по алфавиту;

• можно предложить детям самим объединиться в команды.

Подготовка такого урока требует много времени и предполагает использование большого количества материала. Потому что, кроме перечисленных документов, необходимо выдать детям лист планирования (см. в электронном приложении), который ведет руководитель группы с начала урока, и листы самооценки, которые дети заполняют в конце урока индивидуально.

Лист самооценки

Дата урока_______ Номер группы________

Тема урока_______ Класс________________

Фамилия, имя____________________________

Оцени работу своей группы, отметь галочкой вариант ответа, с которым ты согласен (согласна).

1. Все ли члены группы принимали участие в работе над задачей?

☐ Да, все работали одинаково.

☐ Нет, работал только один.

☐ Кто-то работал больше, а кто-то меньше.

2. Дружно ли вы работали? Были ли ссоры?

☐ Работали дружно, ссор не было.

☐ Работали дружно, спорили, но не ссорились.

☐ Очень трудно было договариваться, не всегда получалось.

3. Тебе нравится результат работы твоей группы?

☐ Да, все получилось хорошо.

☐ Нравится, но можно было бы сделать лучше.

☐ Нет, не нравится.

4. Оцени свой вклад в работу группы. Отметь нужное место на линейке знаком «×». Знак «×» смещается влево от центра, если ты выбрал «Почти все сделали без меня», или вправо от центра, если «Я сделал очень много, без меня работа не получилась бы».

Что же делает учитель по ходу проведения урока-проекта?

• Отслеживает временной регламент.

• Отвечает на вопросы советников групп.

• Фиксирует ход урока с помощью фото- или видеосъемки, чтобы после можно было обсудить с коллегами плюсы и минусы проведенной работы, а также показать ребятам их работу со стороны.

За 10–15 минут до окончания урока начинается защита проектных работ группами, защищают проект докладчики. На защите тоже применяем критериальную систему оценивания.

Приведем пример критериев оценивания (выдаются в виде таблицы) проектной работы «Статистика — катализатор школьных проблем». Оценивались: видеопрезентация, отражающая результаты опроса, построение столбчатых и круговых диаграмм, рекомендации как ответ на вопрос, что нужно сделать для достижения хороших учебных результатов.

Критерии оценивания проектной работы:

– тема и ее актуальность — 1–2 балла;

– цель проекта — 3 балла;

– задачи проекта — 3 балла;

– ход работы — 2 балла;

– видеоинтервью — 2 балла;

– описание и анализ диаграмм — 8 баллов;

– рекомендации — 3 балла;

– художественная ценность — 3 балла;

– воспитательная ценность — 5 баллов.

После защиты проектов в группах проходит рефлексия — по листам самооценки.

Учитель по итогам урока может выставить до трех отметок каждому ученику: первую — по листам, которые вели контролеры, оценивая процесс работы, вторую — за математическую грамотность работы, третью — общую оценку продукта группы.

Урок-тренинг

Этот урок целесообразен, когда необходимо отработать большое количество однотипных заданий для формирования устойчивого предметного навыка по какой-либо теме.

Сначала мы выбираем большое количество заданий для отработки. Часть из них будет выполнена учащимися с помощью консультантов групп, однако большая часть — самостоятельно. Затем мы разбиваем задания на умения, которые используются при их решении. Так формируются баллы за каждое задание. Задания, направленные на формирование одного и того же умения или одинакового уровня сложности



объединяются в блоки. Каждый блок имеет собственную планку в баллах, которую необходимо преодолеть всем ученикам.

Нам удобно предлагать ребятам оценивать работу в таблице, один из вариантов которой приведен ниже (задания взяты из сборника задач для подготовки к ОГЭ).

Покажем, как формируются баллы за задания в разных блоках.

Блок № 1

316. $\frac{1}{7x}-\frac{5x+y}{7xy}$.

1-й балл — найден общий знаменатель и дополнительные множители.

2-й балл — вычитание дробей с одинаковыми знаменателями.

3-й балл — приведение подобных слагаемых.

4-й балл — сокращение полученной дроби.

Блок № 2

321. $\frac{2a}{a^2-25b^2}-\frac{2}{a+5b}$.

1-й балл — разложение на множители при помощи формул сокращенного умножения.

2-й балл — найден общий знаменатель и дополнительные множители.

3-й балл — вычитание дробей с одинаковыми знаменателями.

4-й балл — приведение подобных слагаемых.

Блок № 3

325. $\frac{28x^2}{7x-7}-4x$.

1-й балл — найден общий знаменатель и дополнительные множители.

2-й балл — вычитание дробей с одинаковыми знаменателями.

Тренинг по теме «Сложение и вычитание дробей с разными знаменателями»

Класс ____________________ Дата ____________________

Консультант ________________________

Цель урока ______________________________

Внимание! Каждый участник группы должен решить из каждого блока два примера верно и самостоятельно! Примеры, решенные не самостоятельно, не приносят участнику баллов!

Номер блока	Блок № 1 (min 8 баллов)					Блок № 2 (min 8 баллов)				Блок № 3 (min 9 баллов)				
Номер задания	316	317	318	319	320	321	322	323	324	325	326	327	328	329
Количество баллов	4	4	4	4	4	4	4	4	4	5	4	5	4	5
Иванов														
Петров														
...														

Блок № 4 (min 10 баллов)					Блок № 5 (min 12 баллов)				Сумма баллов	Отметка
330	331	332	333	334	405	406	407	408		
5	5	5	5	5	6	6	6	6	108	
...										

Критерии выставления отметки:

90–108 баллов — «5»; 60–89 баллов — «4»; 47–59 баллов — «3».




3-й балл — приведение подобных слагаемых.

4-й балл — разложение на множители методом вынесения за скобку.

5-й балл — сокращение полученной дроби.

Блок № 4

330. $\frac{2}{a} - \frac{-2a^2 + 9b^2}{ab} - \frac{2a}{b}$.

1-й балл — найден общий знаменатель и дополнительные множители.

2-й балл — вычитание дробей с одинаковыми знаменателями.

3-й балл — приведение подобных слагаемых.

4-й балл — разложение на множители методом вынесения за скобку.

5-й балл — сокращение полученной дроби.

Блок № 5

405. $\frac{2x}{x^2 - 64} - \frac{1}{x - 8}$ при $x = -4$.

1-й балл — разложение на множители при помощи формулы сокращенного умножения.

2-й балл — найден общий знаменатель и дополнительные множители.

3-й балл — вычитание дробей с одинаковыми знаменателями.

4-й балл — приведение подобных слагаемых.

5-й балл — сокращение полученной дроби.

6-й балл — нахождение значения алгебраической дроби.

Когда материал для тренинга подготовлен, учитель выбирает из учащихся класса консультантов, которые будут работать с одноклассниками в группах во время тренинга. Во внеурочное время консультанты под руководством учителя выполняют все задания тренинга. Учитель проверяет правильность решений, чтобы они могли использовать их в качестве эталона во время урока. За эту работу консультантам можно поставить первую отметку.

Затем проходит непосредственно сам урок-тренинг. Как мы уже отметили выше, класс делится на группы. На уроке-тренинге оптимальное количество участников в группе — 4 ученика плюс консультант. Если в классе много слабых учеников, то количество участников в группах можно сократить.

На руках у консультанта находится приведенная выше таблица и тетрадь с эталонными решениями. Участники группы могут задавать консультанту любое количество вопросов по решению, но баллами оцениваются только самостоятельно выполненные задания. Консультант может проверять задания у членов группы как после выполнения каждого задания, так и после выполнения всех заданий блока. В конце урока консультанты подсчитывают суммы баллов и выставляют отметки, пользуясь критериями.

По итогам урока учитель может поставить консультантам еще одну отметку.

Роль учителя на таком уроке минимальна. В начале урока фронтально проводится целеполагание. Изредка требуется разрешать спорные моменты оценивания и выполнения заданий. В конце учитель подводит общий итог проделанной на уроке работы.

Еще о технологии

В описанных уроках мы применяем, помимо критериального оценивания, элементы технологии сотрудничества. Она позволяет реализовать следующие положения нового стандарта: отношение к обучению как к творческому взаимодействию учителя и ученика, обучение без принуждения, идея постановки трудной цели и внушение уверенности в ее преодолении, самоанализ (индивидуальное и коллективное подведение итогов деятельности учащихся), творческое самоуправление учащихся, личностный подход к воспитанию. Роль учителя не в том, чтобы учить, а в том, чтобы помогать учиться. Учитель должен стать создателем развивающей среды, побуждающей ребенка добывать знания. Педагогика сотрудничества предполагает хорошее знание индивидуальных особенностей учеников, их интересов, взаимоотношений. Когда дети работают самостоятельно и у них возникают трудности, учитель приходит на помощь и оказывает ее с учетом индивидуальных особенностей, то есть учитель выступает как помощник, помогающий в преодолении трудностей. В случае затруднения обратиться можно и к своим одноклассникам. Зная особенности детей своего класса, учитель дает возможность всем чувствовать себя уверенно, быть востребованным.

О ПРЕИМУЩЕСТВАХ И РИСКАХ ГРУППОВОЙ РАБОТЫ

М. ЧИБИСОВА,
г. Москва

Трудно переоценить актуальность подхода, предложенного авторами статьи: ФГОС требует от школы формирования у учащихся такого метапредметного результата, как «умение организовывать учебное сотрудничество и совместную деятельность с учителем и сверстниками; работать индивидуально и в группе». Однако в групповой работе решается множество других задач. Психологические и педагогические исследования показывают, что в учебном сотрудничестве лучше формируются все виды компетенций, заложенных в стандарте: предметные (усваивается материал по предмету, закрепляются изученные понятия), личностные (повышается мотивация, развивается коммуникативная компетентность), метапредметные (доказано, что учебная самостоятельность и рефлексивные компетенции наиболее успешно развиваются в совместной деятельности учеников со сверстниками). Также немаловажно, что использование групповой работы зачастую позволяет успешно решать дисциплинарные проблемы. Как отмечала Г.А. Цукерман, автор книги «Виды общения в обучении», организовать работу нескольких групп бывает проще, чем управлять целым классом.

Казалось бы, организовать работу в группе довольно легко: разделил детей на группы и дал им задание. Однако далеко не любое задание, выполняемое совместно, можно считать учебным сотрудничеством. Во-первых, задача, которую получает группа, должна иметь не репродуктивный, а творческий характер; работать по образцу лучше индивидуально. Задания, которые авторы статьи используют на «уроках-проектах», вполне этому требованию соответствуют. Во-вторых, для учебного сотрудничества необходимо такое задание, которое выполняется детьми совместно, в которое каждый вносит какой-то свой вклад. Такие задания называют «неаддитивными»: результат, который получается, должен быть больше, чем отдельная работа каждого ученика. Если же каждый работает над своей собственной задачей автономно, то ни о каком учебном сотрудничестве речи идти не может. Именно поэтому приемы, которые используют авторы, нельзя в полной мере относить к учебному сотрудничеству: здесь итоговый продукт рассматривается как результат работы каждого ученика в отдельности. Строго говоря, такой метод относится к типу дидактических приемов «равный равному». Он также очень важен и нужен, но не подразумевает именно групповой работы.

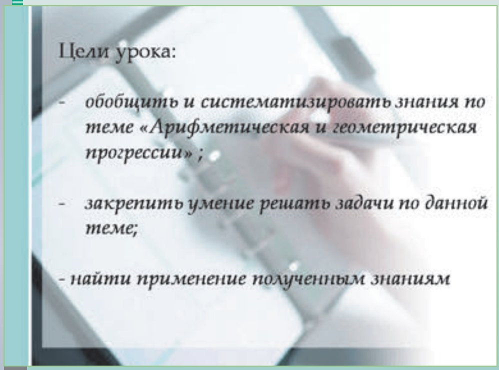
Групповая работа имеет ряд преимуществ, но есть в ней и своего рода риски.

Прежде всего к рискам относится вероятность обострения конфликтов и противоречий. В коллективе класса всегда происходят какие-то процессы: кто-то пользуется симпатией сверстников, а кого-то игнорируют, образуются группировки, тлеют малозаметные конфликты. Все эти неочевидные явления могут всплыть на поверхность и заостриться в ходе групповой работы. Справиться с этим помогает наличие четко расписанных ролей, детализация задания и четкие критерии для оценки. Именно таким подходом и пользуются авторы.

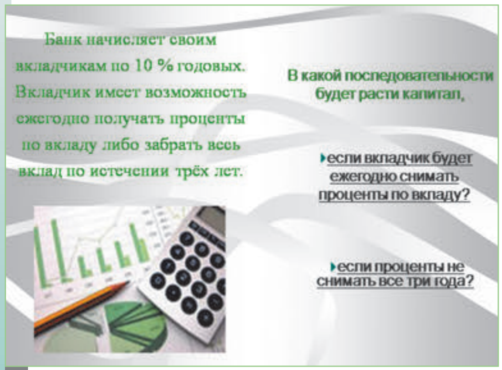
Далее, групповая работа — это всегда шумно! Работа в группе совсем не похожа на привычный нам урок, где ученики тихо выполняют задания учителя. В группе бурлят дискуссии, идет поиск решений и т.п. Нужно быть готовым к детской активности. Если же ее подавлять и требовать в групповой работе соблюдения столь же строгих дисциплинарных норм, как и на обычном уроке, ее смысл пропадает.

Групповая работа направлена на сплочение класса и развитие коммуникативных навыков, однако может приводить и к противоположному результату, скажем, если каждый раз один и тот же ученик становится руководителем, а другому остается роль советника, необходимость в котором возникает далеко не всегда. Да и способы принятия решений в группах могут быть далеки от конструктивных. Поэтому необходимо каждый раз менять состав групп и выполняемые роли, а также проводить обсуждение итогов. Не случайно авторы при защите проекта просят детей рассказать о том, какие сложности возникали. Хорошо бы при этом также не только перечислить, кто помогал с ними справиться, но и обсудить, как удалось эти трудности разрешить.

Наконец, совместное выполнение заданий требует больше времени. Работая индивидуально, дети могут успеть решить больше задач. Подготовка группового занятия также довольно затратна по времени. Однако полученный результат, безусловно, этого стоит.



2



3

4

Фрагмент презентации публикуется в авторской редакции

Сегодня в нашей рубрике «Разбор урока» мы обсуждаем урок математики в 9-м классе, проведенный студенткой магистратуры Московского городского педагогического университета Натальей Николаевной ФАЙБЫШЕНКО. В обсуждении принимают участие ее сокурсницы Анна ПОЗДНЯК, Александра МАСКАЛЕВА, Ирина КОРЫСТИНА, Елена БЕЛОЗУБ. Ведет обсуждение руководитель практики профессор Лариса Олеговна ДЕНИЩЕВА.

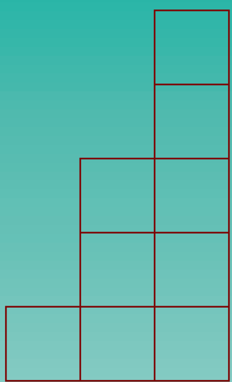


Рис. 2

9 класс

ТЕМА УРОКА: «АРИФМЕТИЧЕСКАЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИИ»

Тип урока: урок обобщения и систематизации знаний
Учебник: Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Нешков К.И. и др.
Цели урока:
образовательные:
– систематизировать и расширить ранее полученные знания и закрепить умения учащихся при решении задач по теме «Арифметическая и геометрическая прогрессии»,
– проверить полноту и осознанность усвоения знаний учащихся по теме;
развивающие:
– развитие памяти, внимания, мышления, математической речи,
– развитие познавательных процессов личности,
– развить интерес учащихся к предмету;
воспитательные:
– воспитывать культуру общения,
– создать условия для формирования чувства прекрасного.
Формы работы: фронтальная, индивидуальная, работа в парах.
Оборудование: карточки с формулами на парту, листы с заданиями теста, презентация, карточки рефлексии (Рис. 1).

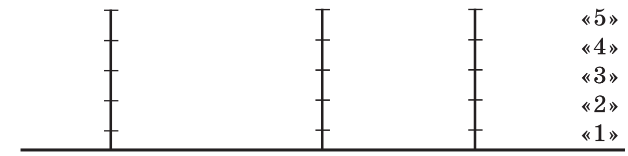
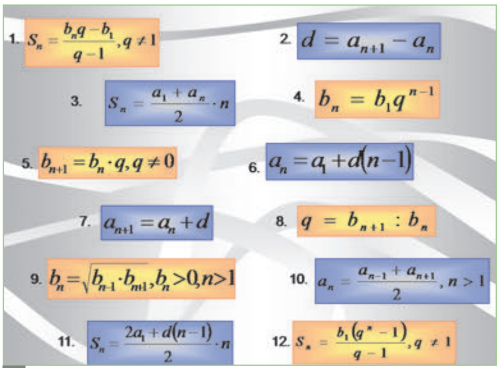


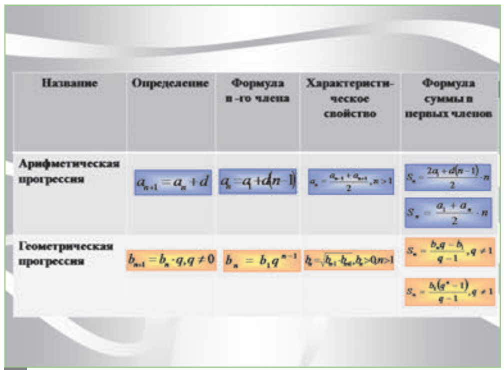
Рис. 1

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru (Презентация.)

5



6



7

Ход урока

Организационный момент. Постановка цели и задач урока. Мотивация учебной деятельности учащихся (2 мин.)

– Мы закончили изучение темы «Арифметическая и геометрическая прогрессии». Чему же вы научились, изучая прогрессии?

[Различать среди последовательностей арифметическую и геометрическую прогрессии, узнали формулы для нахождения n-го члена и суммы n первых членов прогрессии, решали задачи на их применение.]

– А понадобятся ли вам эти знания? Где, кроме уроков алгебры, можно встретиться с прогрессиями? Возникали ли у вас такие вопросы? Попробуем найти на них ответы на уроке. 2

3. Актуализация знаний (5 мин.)

– Представьте, что вы располагаете некоторой суммой и хотите положить ее в банк на три года на вклад, по которому начисляют 10% годовых. У вас есть возможность ежегодно получать проценты по вкладу либо забрать весь вклад по истечении трех лет. 3

– В какой последовательности будет расти капитал, если вы ежегодно будете снимать проценты по вкладу? 4, 5

[Сам вклад меняться не будет, и каждый год проценты по вкладу будут представлять одну и ту же сумму, поэтому капитал будет увеличиваться в арифметической прогрессии.]

– А если проценты не снимать все три года?

[Вклад будет каждый год увеличиваться, проценты по вкладу тоже будут ежегодно увеличиваться, поэтому капитал будет расти в геометрической прогрессии.]

– Чтобы решать задачи на прогрессии, необходимо знать...

[Формулы.]

Вспомните их. 6 Заполните ячейки таблицы.

Название	Арифметическая прогрессия	Геометрическая прогрессия
Определение		
Формула n-го члена		
Характеристическое свойство		
Формула суммы n первых членов		

– Проверьте, верно ли вы записали формулы. (*Учащиеся проверяют свою работу, сравнивая ее с образцом на слайде 7.*)

– А для чего мы повторили формулы?

[Чтобы использовать их при решении задач.]

– Вы готовы к решению задач?

Применение знаний в стандартной ситуации (10 мин.)

– Предлагаю вам семь задач, к каждой из них есть четыре варианта ответа, один из которых верный. Отметьте номера верных ответов в бланке.

1. Какая из последовательностей является геометрической прогрессией?

А. Последовательность натуральных чисел, кратных 3.

Б. Последовательность кубов натуральных чисел.

В. Последовательность натуральных степеней числа 3.

Г. Последовательность чисел, обратных натуральным.

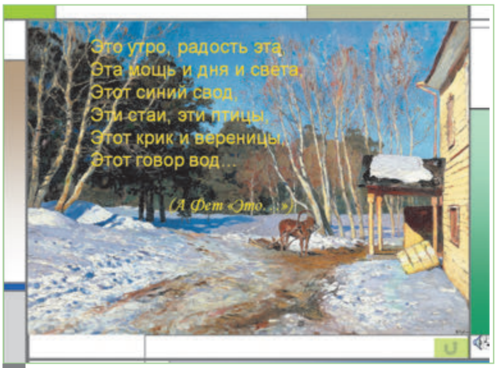
2. Какое из указанных чисел является членом следующей арифметической прогрессии: 6; 12; 18; 24; ...?

А. 303 **Б.** 109 **В.** 106 **Г.** 96

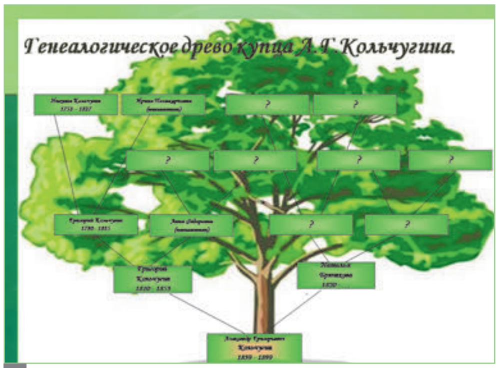
3. В геометрической прогрессии $b_1=81$, $q=-\frac{1}{3}$. В каком случае при сравнении членов этой прогрессии знак неравенства поставлен неверно?

А. $b_2<b_3$ **Б.** $b_4>b_6$ **В.** $b_3>b_4$ **Г.** $b_5>b_7$

8



12



14

4. Фигура составлена из столбиков так, как показано на рисунке 2. В каждом следующем столбике на 2 квадрата больше, чем в предыдущем. Сколько квадратов содержится в 20-м столбике?

А. 20 **Б.** 39
В. 40 **Г.** 41

5. Геометрическая прогрессия (b_n) задана условиями: $b_1 = 3$, $b_{n+1} = b_n \cdot 2$. Укажите формулу n-го члена этой прогрессии.

А. $b_n = 3 \cdot 2n$ **Б.** $b_n = 3 \cdot 2^n$
В. $b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ **Г.** $b_n = 3 \cdot 2(n-1)$

6. Найдите S_{20} арифметической прогрессии, в которой $a_1 = 20$, $a_{20} = 39$.

А. 59 **Б.** 590
В. 118 **Г.** 1180

7. Укажите третий член геометрической прогрессии: ...; 4;...; 9; ... $(b_n > 0)$.

А. –6 **Б.** 6,5
В. $2\frac{2}{3}$ **Г.** 6

(*Учитель собирает бланки с ответами, для быстрой проверки прокалывает их по шаблону и возвращает ученикам. Анализирует вместе с учениками ошибки и причины ошибок.*)

	А	Б	В	Г
1			+	
2				+
3		+		
4		+		
5			+	
6		+		
7				+

Применение знаний в нестандартной ситуации (5 мин.)

– Ребята, а вы никогда не задумывались, что знание арифметической прогрессии помогает поэтам? Оказывается, последовательности номеров ударных слогов в стихотворениях — это арифметические прогрессии. [8]

– Перед вами строки стихотворений. Определите первый член и разность арифметической прогрессии (стихотворный размер).

(*Ученики работают в парах, находят арифметические прогрессии, зачитывают стихотворения*).

Стихотворный размер	
Ямб	$a_1 = 2, d = 2$
Хорей	$a_1 = 1, d = 2$
Дактиль	$a_1 = 3, d = 3$
Амфибрахий	$a_1 = 2, d = 3$
Анапест	$a_1 = 1, d = 3$

Есть в русской природе усталая нежность,
Безмолвная боль затаенной печали,
Безвыходность горя,
безгласность, безбрежность,
Холодная высь, уходящие дали. [9]
К. Бальмонт. Безглагольность
[Амфибрахий.]

Как хорошо ты, о море ночное, —
Здесь лучезарно, там сизо-темно…
В лунном сиянии, словно живое,
Ходит, и дышит, и блещет оно. [10]
Ф. Тютчев. Как …
[Анапест.]

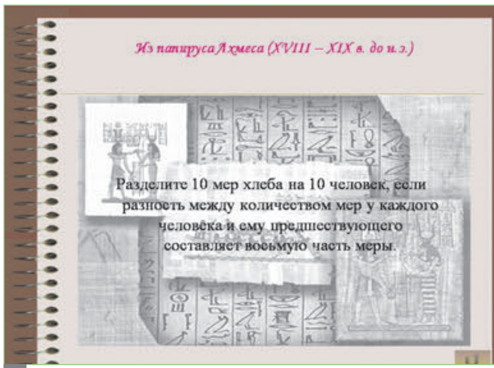
Улеглась метелица… путь озарен…
Ночь глядит миллионами тусклых очей…
Погружай меня в сон, колокольчика звон!
Выноси меня, тройка усталых коней! [11]
Я. Полонский. Колокольчик
[Дактиль.]

Это утро, радость эта,
Эта мощь и дня и света,
Этот синий свод,
Эти стаи, эти птицы,
Этот крик и вереницы,
Этот говор вод… [12]
А. Фет. Это…
[Хорей.]

Мороз и солнце, день чудесный!
Еще ты дремлешь, друг прелестный —
Пора, красавица, проснись… [13]
А.С. Пушкин. Зимнее утро
[Ямб.]

15

17



18

– Вот мы нашли прогрессии в литературе, а можно ли найти прогрессию в своей родословной? В какой последовательности увеличивается число прародителей у каждого человека? Определите вид последовательности на примере родословной основателя города Кольчугино — купца Александра Григорьевича Кольчугина. 14

[Эта последовательность — геометрическая прогрессия.]

Решение задач (контроль знаний и способов действий) (6 мин.)

– Вы научились решать задачи по теме «Прогрессии», а значит, можете оценить правильность готового решения. Предлагаю вам проверить решение двух задач, найти ошибки в решении, исправить их и записать в тетради верное решение одной из них.

Задание 1. Найдите сумму всех натуральных чисел, кратных трем и не превосходящих 100. 15

Дано: (a_n) — арифметическая прогрессия, $a_n = 3n$, $a_n \le 100$.

Найти: S_n.

«*Решение*». Так как $a_n = 3n$, $a_n \le 100$, то $3n \le 100$, то есть $n \le 33\frac{1}{3}$. Воспользуемся формулой суммы арифметической прогрессии:

$$S_{33} = \frac{a_1 + a_{33}}{2} \cdot 33.$$

Найдем $a_1 = 3 \cdot 1 = 3$, $a_{33} = 100$, тогда

$$S_{33} = \frac{3+100}{2} \cdot 33 = 1699,5.$$

«*Ответ*»: 1699,5.

Ошибка в нахождении 33-го члена арифметической прогрессии: $a_{33} = 99$, сумма прогрессии равна

$$S_{33} = \frac{3+99}{2} \cdot 33 = 1683.$$

Задание 2. Между числами –2 и –32 вставьте три числа так, чтобы получилась геометрическая прогрессия. 16

Дано: (b_n) — геометрическая прогрессия, $b_1 = -2$, $b_5 = -32$.

Найти: b_2, b_3, b_4.

«*Решение*». Из формулы $b_5 = b_1 \cdot q^4$ найдем q:

$$q^4 = \frac{b_5}{b_1} = \frac{-32}{-2} = 16, \; q = 2.$$

Теперь найдем требуемое:

$$b_2 = b_1 \cdot q = -2 \cdot 2 = -4;$$
$$b_3 = b_2 \cdot q = -4 \cdot 2 = -8;$$
$$b_4 = b_3 \cdot q = -8 \cdot 2 = -16.$$

«*Ответ*»: $b_2 = -4$, $b_3 = -8$, $b_4 = -16$.

Ошибка в нахождении знаменателя геометрической прогрессии: $q = \pm 2$. Поэтому возможна еще одна прогрессия, где $b_2 = 4$, $b_3 = -8$, $b_4 = 16$.

Защита решений задач (10 мин.)

– Задачи на прогрессии можно встретить не только в современных учебниках. Ваши одноклассники подготовили решения задач из учебников, по которым учились много лет назад мамы и бабушки. 17

(*Учащиеся представляют подготовленные ими решения, остальные внимательно слушают и оценивают каждое решение и сложность задачи.*)

1. Из папируса Ахмеса (XIX–XVIII в. до н.э.) 18

Разделите 10 мер хлеба на 10 человек, если разность между количеством мер у каждого человека и ему предшествующего составляет восьмую часть меры.

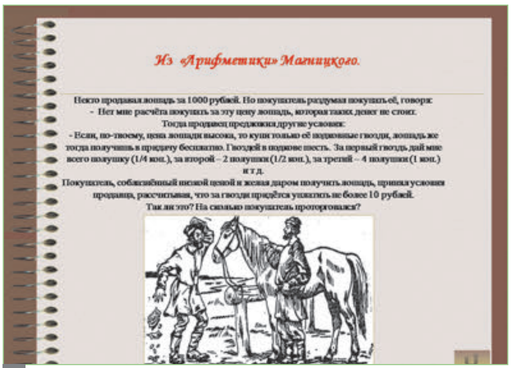
Решение. $S_{10} = 10$, $n = 10$, $d = \dfrac{2a_1 + \frac{1}{8} \cdot 9}{2} \cdot 10 = 10$,

$$\frac{2a_1 + \frac{9}{8}}{2} = 1; \quad a_1 + \frac{9}{16} = 1, \quad a_1 = \frac{7}{16}; \quad a_2 = \frac{7}{16} + \frac{1}{8} = \frac{9}{16};$$

$$a_3 = \frac{11}{16}; \quad a_4 = \frac{13}{16}; \quad a_5 = \frac{15}{16}; \quad a_6 = 1\frac{1}{16};$$

$$a_7 = 1\frac{3}{16}; \quad a_8 = 1\frac{5}{16}; \quad a_9 = 1\frac{7}{16}; \quad a_{10} = 1\frac{9}{16}.$$

Ответ: $\frac{7}{16}$, $\frac{9}{16}$, $\frac{11}{16}$, $\frac{13}{16}$, $\frac{15}{16}$, $1\frac{1}{16}$, $1\frac{3}{16}$, $1\frac{7}{16}$, $1\frac{9}{16}$.



19

20

21

2. Из «Арифметики» Магницкого 19

Некто продавал лошадь за 1000 рублей. Но покупатель раздумал покупать ее, говоря:

– Нет мне расчета покупать за эту цену лошадь, которая таких денег не стоит.

Тогда продавец предложил другие условия:

– Если, по-твоему, цена высока, то купи только подковные гвозди, а лошадь получишь в придачу бесплатно. Гвоздей в подкове шесть. За первый гвоздь дай мне всего полушку ($\frac{1}{4}$ коп.), за второй — 2 полушки ($\frac{1}{2}$ коп.), за третий — 4 полушки (1 коп.) и т.д. Покупатель, соблазненный низкой ценой и желая даром получить лошадь, принял условия продавца, рассчитывая, что за гвозди придется уплатить не более 10 рублей. Так ли это? На сколько покупатель проторговался?

Решение. $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}$; 1; 2; 2^2; 2^3; ...; 2^{21}.

(b_n) — геометрическая прогрессия: $b_1 = \frac{1}{4}$, $q = 2$.

$$S_n = \frac{b_1\left(q^n - 1\right)}{q-1},\ q \neq 1.$$

$$S_{24} = \frac{\frac{1}{4}\left(2^{24} - 1\right)}{2-1} = \frac{1}{4}\cdot 2^{24} - \frac{1}{4} = 2^{22} - \frac{1}{4} \approx 42\,000 \text{ руб.}$$

При таких условиях не обидно дать и лошадь в придачу.

3. Легенда о создателе шахмат 20

По преданию, индийский раджа Шерам, восхищенный игрой в шахматы, призвал к себе изобретателя, ученого Сету, и сказал:

– Я желаю достойно вознаградить тебя за прекрасную игру. Я достаточно богат, чтобы исполнить любое твое желание!

– Повелитель, — сказал Сета, — прикажи выдать мне за первую клетку шахматной доски одно пшеничное зерно, за вторую — 2 зерна, за третью — 4 зерна и т.д.

Смог ли раджа выполнить желание Сеты?

Решение. $S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{62} + 2^{63} = S_{64}$.

$$S_{64} = \frac{1\cdot\left(2^{64} - 1\right)}{2-1} = 2^{64} - 1 = 18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 551\ 615.$$

Ответ: раджа не смог выдать подобной награды, так как это количество зерен превышает количество зерна пшеницы, собранного за всю историю человечества.

4. Из книги Е.Д. Войцеховского «Курс чистой математики» 21

Служившему воину дано вознаграждение: за первую рану — 1 копейка, за вторую рану — 2 копейки, за третью — 4 копейки и т.д. Всего воин получил 655 рублей 35 копеек. Сколько ран у воина?

Решение. 655 руб. 35 коп. = 65 535 коп.

$$\frac{1\left(2^n - 1\right)}{2-1} = 65\ 535,$$

отсюда

$$2^n - 1 = 65\ 535,$$

или

$$2^n = 65\ 536,\ 2^n = 2^{16},$$

значит, $n = 16$.

Ответ: при такой системе вознаграждения воин должен получить 16 ран и остаться при этом в живых.

Рефлексия учебной деятельности (2 мин.)

– Наш урок подошел к концу. Подведем его итоги. Какие цели были поставлены? Достигли ли мы их? Оцените по 5-балльной шкале уровень достижения цели урока, свои знания и умения по теме «Арифметическая и геометрическая прогрессии», а также насколько интересен вам был материал урока.

Задание на дом

Записать решение одной из старинных задач на прогрессии или придумать и решить свою задачу.

Обсуждение урока

Н.Ф. Обобщающий урок завершает изучение темы «Арифметическая и геометрическая прогрессии». Учащиеся уже овладели необходимым запасом знаний по теме и имеют навык их применения в стандартной ситуации, и теперь открывается одна из возможностей формирования мотивации учащихся к обучению и познанию: показать применение полученных знаний — от поиска ошибок в решении до «открытия» прогрессий в, казалось бы, самых неожиданных ситуациях.

Отмечу, что перед проведением этого урока учащиеся на уроках литературы повторили стихотворные размеры — ямб, хорей, дактиль, анапест, амфибрахий.

А.П. Мне понравилось, что с первых минут урока учащиеся погружаются в решение проблемы, как выгоднее хранить деньги в банке, чтобы получить больший доход по вкладу. А все ли учащиеся смогли на слух «увидеть» в этом примере прогрессии? Не нужны ли здесь более подробные пояснения?

Н.Ф. Для того чтобы все учащиеся смогли «увидеть» прогрессии, модели ситуаций представлены на слайдах, где визуально показано увеличение общей суммы выплат по банковским процентам в каждом случае.

Л.Д. Думается, что задачи с банковскими расчетами нужно проговорить, возможно, учителю целесообразно сделать некоторые записи на доске, потому что не уверена, что только «картинки» способны ликвидировать недопонимание.

Н.Ф. Согласна с вами. Но на слайдах есть небольшой комментарий к каждой задаче. Для лучшего понимания рассматривался доход по вкладу в виде процентов, начисленных на определенную сумму. Например, на вклад в 10 000 рублей в первом случае ежегодное начисление процентов в течение трех лет не меняется — по 1000 рублей, а во втором случае это 1000, 1100 и 1210 рублей. Такие примеры в сочетании с «картинками» помогают разобраться в проблеме.

А.М. На мой взгляд, контроль усвоения материала организован достаточно хорошо, проверяются и теоретические знания, и практические умения, но данный контроль не рассчитан на учащихся, пропустивших занятия или имеющих ограниченные возможности здоровья.

Н.Ф. Позволю себе с вами не согласиться. Контроль усвоения и коррекция знаний по теме уже были проведены. Проверка теоретических знаний — формул, необходимых при решении задач, позволяет учитывать разные возможности учащихся: некоторые могут заполнить предложенные таблицы по памяти, другим предлагается список формул, которые надо узнать и записать.

Е.Б. Задания, предложенные в тесте, базового уровня сложности и способствуют систематизации знаний учащихся по теме «Прогрессии», готовят учащихся к итоговой аттестации в форме ОГЭ.

А.П. Мне не понравилось в тесте наличие только одного варианта. В этом случае, во избежание списывания, необходимо рассаживать их по одному. На мой взгляд, лучше бы сделать два варианта и выполнить взаимопроверку теста (поменялись листочками, проверили по образцу, вернули листочки и разобрали ошибки).

Н.Ф. Возможно, вы правы. На уроке акцент делается на систематизацию и расширение знаний, тестирование проводится с целью повторения основных понятий и применения их для решения простейших задач. Учащиеся уже умеют это делать, хорошо справляются с предложенными заданиями, поэтому необходимость в списывании отпадает.

И.К. А мне хочется отметить оригинальный прием проверки теста.

Н.Ф. Такой способ позволяет сэкономить время — проверить одновременно все работы, которые сразу выдаются учащимся; можно тут же разобрать допущенные ошибки.

И.К. Предполагается ли оценка выполненных тестов?

Н.Ф. Отметку за тест могут поставить сами учащиеся в соответствии с критериями, предложенными учителем. На проведенном уроке отметка за тест не выставлялась, но ее наличие помогло ученикам выполнить самооценку своих знаний и умений по теме при проведении рефлексии в конце урока.

А.П. Очень понравилась связь с литературой. Это необычно и интересно.

Н.Ф. Это действительно интересно. И, как оказалось, достаточно сложно найти поэтические строки, написанные определенным стихотворным размером. Поэтому понадобилась помощь учителя литературы; ее такая неожиданная связь литературы с математикой заинтересовала.

Л.Д. Мне кажется, что в примерах стихов нужно выделять не все гласные в словах, а только ударные, в этом случае лучше видна разность арифметической прогрессии.

Н.Ф. Разность прогрессии лучше видна именно при выделении всех гласных (ударные гласные дополнительно выделены подчеркиванием), поскольку гласные образуют слоги. Выделяя гласные — выделяем слоги, а подчеркивая гласные — ударные слоги.

И.К. Почему именно на этом этапе урока рассматривается связь с литературой? Может, лучше его перенести на конец урока?

Н.Ф. Это психологическая разгрузка, которая позволяет развивать эстетическое сознание через освоение художественного наследия, а также снижает утомляемость через смену видов деятельности, но в то же время мы продолжаем работу по теме урока. На уроке ребята зачитывали стихотворные строки под специально подобранную классическую музыку. Получилось очень красиво!

А.П. Родословная купца Кольчугина, безусловно, осуществляет связь с историей родного края. Но для нахождения этой закономерности достаточно двух-трех устных вопросов. Не будет ли это уже переизбытком информации? Не отвлечет ли учащихся от сути самого урока — прогрессий?

Н.Ф. Для нахождения последовательности в родословной неплохо бы наглядно представить, как увеличивается число прародителей. Такое представление помогает быстрее ответить на поставленные вопросы. Слайд с родословной купца Кольчугина приводится именно с этой целью. Но это еще и хорошая возможность напомнить ребятам об основателе города. Обсуждения самой родословной не проводится, поэтому, считаю, что приведенный пример не отвлечет ребят от урока.

А.М. На мой взгляд, задание с проверкой готового решения задач хорошо демонстрирует степень понимания учащимися основных элементов изученного материала. Если ученик отлично ориентируется в материале, он легко найдет ошибки.

Н.Ф. Ошибки, допущенные в предложенных решениях, как показывает практика, являются типичными: учащиеся часто ошибаются по невнимательности и теряют отрицательные корни уравнений второй и четвертой степени. Поэтому задание направлено на оценку правильности выполнения учебной задачи, развитие внимания и навыков самоконтроля.

Е.Б. Задания разного уровня — и базового, и повышенного — позволяют учитывать разные способности учащихся. Предложенные образцы с решениями — помогают понять способы решения, не бояться решать более сложные задачи.

А.М. Мне понравилось, что к уроку было дано и необычное домашнее задание: подобрать и решить задачи на прогрессии из старых источников. Выбор задачи с учетом интересов учащихся, подготовка решения и его защита — это ситуация успеха, в которой ученики могут почувствовать себя увереннее.

Н.Ф. Действительно, учащиеся достаточно уверенно себя чувствовали. Им понравилось представлять готовые решения задач, сюжет которых отличается от предложенных в современных учебниках, позволяет «заглянуть» в историю.

А.М. Так как я не знаю, каков уровень математической подготовки класса, мне сложно судить, учтены ли в нем особенности класса. Но если предположить, что класс гуманитарный, ребятам будет интересно увидеть математику в литературе и истории.

Н.Ф. Класс, в котором проводился урок, общеобразовательный. Профиль обучения ребята выбирают в старшей школе. Возможно, такие уроки дают возможность понять, что математика нужна всем, независимо от выбранного профиля. Рефлексия, проведенная в конце урока, показала, что материал урока был интересен всем учащимся.

И.К. По содержанию задания, предложенные на уроке, интересные, творческие, нестандартные. Смена видов деятельности, различные формы и методы работы способствовали поддержанию интереса учащихся к уроку. Получился отличный урок, поставленные в начале урока задачи выполнены успешно.

Л.Д. Урок проводился учителем после завершения изучения тем «Арифметическая и геометрическая прогрессии». Очевидно, что такой же урок можно провести и при заключительном итоговом повторении курса алгебры. Как показывает опыт посещения уроков, подобный урок существенно отличается от большинства уроков, которые проводятся в выпускных классах в преддверии экзаменов: все озадачены подготовкой к итоговой аттестации, сдаче ОГЭ, ЕГЭ. В этой связи в каждой теме решаются задачи из открытого банка задач, задачи, входившие в открытые варианты, что подменяет изучение предмета, снижает его образовательные, воспитательные и развивающие возможности, лишает возможности показа широкого спектра приложений математики в различных областях знаний, иллюстрации исторических аспектов. На этом же уроке, кроме реальной систематизации знаний, пристальное внимание было обращено на показ межпредметных связей математики (с литературой, историей, краеведением), что создает представление о целостной картине окружающего нас мира. Спасибо за урок!

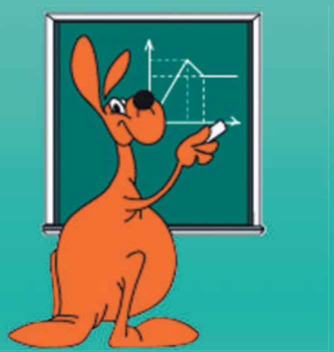
Н. ЖАРКОВСКАЯ,
г. Санкт-Петербург

ЯРКИЕ ЗАДАЧИ «КЕНГУРУ-2015»

19 марта 2015 года (как обычно, в третий четверг месяца), состоялся очередной международный математический конкурс «Кенгуру». В нем приняли участие 1 697 216 российских школьников из 84 регионов. Сегодня мы рассмотрим наиболее яркие задачи этого конкурса. Разбор всех заданий конкурса «Кенгуру-2015» — в ежегодной брошюре, посвященной его итогам, которую можно заказать через сайт конкурса www.mathkang.ru, там же можно найти ссылку на видеоразбор всех заданий.

Наиболее трудной для самых младших участников конкурса оказалась следующая задача (здесь и далее верные ответы отмечены синим шрифтом).

Задача 1. (*2-й класс, № 23*) На рисунке 1 изображен вид спереди, слева и сверху конструкции, сложенной из кубиков. Какое наибольшее количество кубиков может быть в такой конструкции?
(А) 28 (Б) 32 (В) 34 (Г) 39 (Д) 48



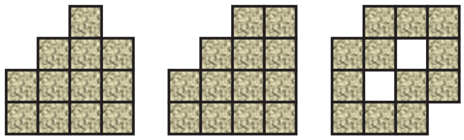
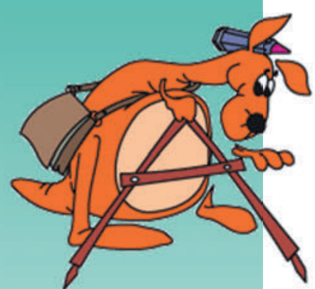


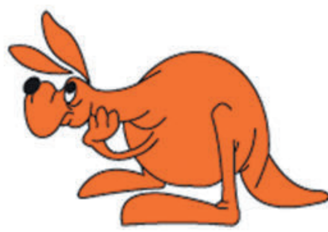
Рис. 1

Решение. Чтобы понять, сколько кубиков можно использовать, посмотрим на конструкцию сверху, а далее будем вписывать в каждую клетку таблицы 4×4 (рис. 2) число кубиков, которые можно поставить на эту клетку. Виды спереди и слева дают нам ограничения на числа в строках и столбцах нашей таблицы (мы их указываем по краям таблицы), а вид сверху показывает, в каких клетках надо поставить 0.

2	0	2	2	2
слева → 3	2	3	0	3
4	2	0	4	3
4	2	3	4	0
	2	3	4	3
		спереди ↑		

Рис. 2





Заполняя клетку с ненулевым содержимым, мы выбираем меньшее из чисел, отмечающих строку и столбец, на пересечении которых она стоит. Например, вид спереди нам подсказывает, что в самом правом ряду нашей таблицы не могут стоять числа, большие 3 (но хоть одна тройка там быть должна). Из вида слева следует, что в верхнюю клетку этого ряда нельзя ставить число, большее 2, а вид сверху показывает, что в нижней клетке должен стоять ноль. Сложив все выписанные числа, получаем 32 — столько кубиков мы можем уложить, добавить к ним хотя бы один кубик, не изменяя заданных картинок, невозможно.

Неудивительно, что с этой задачей справились всего 14% участников, но почти такой же трудной оказалась следующая не очень сложная и наглядная задача.

Задача 2. (*2-й класс, № 14*) Петя нарисовал на листе линию, не отрывая карандаша от бумаги. Затем он разрезал этот лист на две части. Верхняя часть изображена на рисунке 3. Как может выглядеть нижняя часть этого листа?

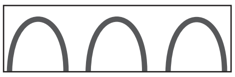
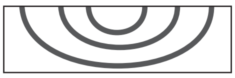
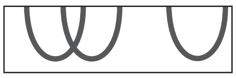
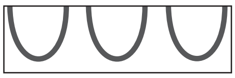
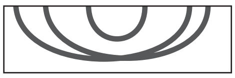
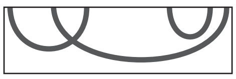


Рис. 3

(А)  (Б) 

(В)  (Г) 

(Д) 

Чтобы решить эту задачу, достаточно соединить пары соседних линий в предложенных ответах, тогда станет ясно, что на всех рисунках, кроме Д, линии распадаются на две или три части. Тем не менее правильный ответ к этой задаче указали всего около 15% ребят, а более 65% выбрали ответ В.

Отметим, что аналогичная задача с несколько более сложным рисунком, предложенная ученикам 3-х и 4-х классов, оказалась самой трудной в своем варианте.

Задача 3. (*3–4-е классы, № 22*) У длинной веревки связали концы и разложили получившуюся петлю на столе. Часть этой петли закрыта (рис. 4). Как может выглядеть закрытая часть?

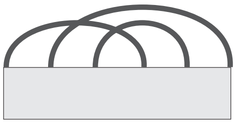


Рис. 4

(А)  (Б) 

(В)  (Г) 

(Д) 

Справились с этой задачей 12% участников, а около половины ребят обеих параллелей выбрали ответ А.

Близкой по трудности оказалась и следующая задача.

Задача 4. (*3–4-е классы, № 26*) Никита выписывает подряд целые числа: 1, 2, 3, ..., но он не любит цифру 7 и пропускает все числа, которые ее содержат. Он выписал 777 чисел. Какое число он написал последним?

(А) 888 (Б) 1000 (В) 1053
(Г) 1333 (Д) 1631

Решение. Посмотрим, сколько чисел пропустит Никита в первой сотне. Ясно, что он пропустит все числа с первой цифрой 7 (их 10) и по одному числу в каждом из остальных десятков (еще 9 чисел). Значит, он запишет $100 - 19 = 81$ число из первой сотни. Двигаясь дальше, он будет писать так же по 81 числу из каждой следующей сотни, кроме той, что начинается с цифры 7 (ее он пропустит целиком). Всего из первой тысячи Никита запишет $9 \cdot 81 = 729$ чисел.

После этого ему останется написать еще $777 - 729 = 48$ чисел, начиная с 1001, при этом он пропустит числа 1007, 1017, 1027, 1037, 1047 (и только эти 5 чисел). Итак, Никита напишет 48 четырехзначных чисел, а 5 четырехзначных чисел он пропустит, следовательно, последним будет написано число $1000 + 48 + 5 = 1053$.

Наиболее трудными среди задач, оцениваемых в 4 балла, в варианте для 5–6-х классов оказались следующие.

Задача 5. (*5–6-е классы, № 13*) Маша ежедневно записывает дату и вычисляет сумму написанных цифр. Например, 2 января она записала 02.01 и вычислила: $0 + 2 + 0 + 1 = 3$. Какая самая большая сумма у нее может получиться?

(А) 7 (Б) 13 (В) 14 (Г) 20 (Д) 21

Решение. Месяц с самой большой суммой цифр в записи — это сентябрь (09). День в месяце с самой большой суммой цифр — это 29-е число. Таким образом, самую большую сумму Маша получит 29 сентября: $2 + 9 + 0 + 9 = 20$.

Верный ответ к этой задаче указали 22% пятиклассников и 27% шестиклассников, и примерно 30% участников выбрали ответ 7, который получается 31 декабря.

Задача 6. (*5–6-е классы, № 20*) Назовем четырехзначное число *интересным*, если в его записи есть только тройки и четверки. Сколько интересных чисел делится и на 3, и на 4?

(А) 1 (**Б**) 2 (В) 4 (Г) 8 (Д) 16

Решение. Число делится на 4 в том случае, когда на 4 делится двузначное число, образованное двумя его последними цифрами. Из чисел 33, 34, 43, 44 на 4 делится только 44, значит, наше число оканчивается на 44. Чтобы число делилось на 3, нужно, чтобы сумма цифр делилась на 3. Две цифры у нас уже есть, значит, возможны только такие варианты:

$$4 + 4 + 3 + 3;\ 4 + 4 + 4 + 3;$$
$$4 + 4 + 4 + 4.$$

Из этих сумм на 3 делится только вторая (она равна 15), значит, наше число составлено из цифр 4, 4, 4, 3 и оканчивается на две четверки. Таких чисел только два: 3444 и 4344.

С этой задачей справились 23% пятиклассников и 27% шестиклассников, и почти столько же участников выбрали ответ В.

Наиболее трудными во всем варианте оказалась задача № 23, а также задача № 24, полностью аналогичная рассмотренной нами задаче № 23 для 2-го класса (около 10% верных ответов в обеих параллелях).

Задача 7. (*5–6-е классы, № 23*) Заменяя в слове КЕНГУРУ буквы цифрами (разные — разными, одинаковые — одинаковыми), можно получить различные семизначные числа. Среди всех таких чисел выбрали наибольшее число, делящееся на 9. Какая цифра в этом числе заменяет букву Р?

(**А**) 0 (Б) 2 (В) 4 (Г) 7 (Д) 9

Решение. Буквы К, Е, Н, Г заменим самыми большими цифрами и получим число 9876УРУ. Чтобы оно делилось на 9, нужно, чтобы сумма 30 + У + Р + У делилась на 9. Цифры У и Р не больше чем 5 и различны, значит, сумма У + Р + У не больше 14 = 5 + 5 + 4. Поэтому сумма 30 + У + Р + У не может быть равной 45. Значит, она равна 36, а У + Р + У = 6. Чтобы это число было побольше, мы должны сделать побольше цифру У, поэтому берем У = 3, Р = 0. Получаем число 9 876 303, оно и есть наибольшее из интересующих нас чисел.

Задача 8. (*5–6-е классы, № 24*) На рисунке 5 изображен вид спереди, справа и сверху некоторой конструкции из кубиков. Какое наибольшее количество кубиков может быть в такой конструкции?

(**А**) 31 (Б) 32 (В) 33 (Г) 34 (Д) 48

Рис. 5

Решается эта задача точно так же, как и задача № 23 для 2-го класса, при этом получается распределение кубиков, изображенное на рисунке 6 справа.

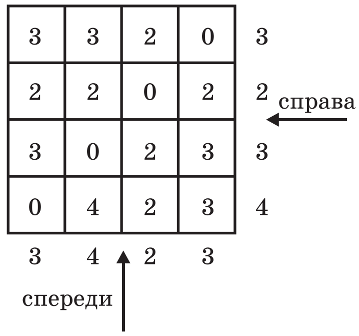


Рис. 6

Отметим еще две задачи этого варианта.

Задача 9. (*5–6-е классы, № 28*) Дима поставил на прямой четыре точки. Для каждой пары отмеченных точек он измерил расстояние между ними и записал эти расстояния в порядке возрастания: 2, 4, k, 9, 11, 13. Чему равно k ?

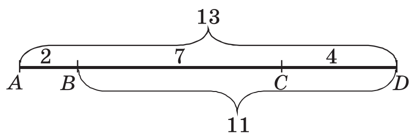


Рис. 7

(А) 5 (Б) 6 (**В**) 7 (Г) 8

(Д) невозможно определить

Решение. Обозначим данные четыре точки буквами A, B, C и D (рис. 7). Заметим, что самый длинный отрезок — это AD, он равен 13. Любая из точек B и C разбивает AD на два отрезка с суммой длин, равной 13. В нашем списке есть две пары чисел с такой суммой: 2 + 11 и 4 + 9. Это значит, что либо $AB = 2$, либо $AB = 4$ (соответственно, $CD = 4$ или $CD = 2$). В любом из этих случаев отрезок $BC = 13 - 2 - 4 = 7$ и есть недостающая длина.

Верный ответ к этой задаче указали около 30% участников, примерно столько же ребят выбрали ответ 6.

Задача 10. (*5–6-е классы, № 30*) В клетки таблицы 5×5 вписаны числа так, что все десять сумм в строках и столбцах одинаковы. Известно, что не все эти числа равны между собой. Какое наибольшее количество одинаковых чисел может быть в этой таблице?

(А) 16 (Б) 20 (**В**) 21 (Г) 22 (Д) 24

Решение. Легко привести пример, когда в таблице будет 21 одинаковое число (рис. 8). Докажем, что больше одинаковых чисел быть не может.

–1	1	0	0	0
1	–1	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

Рис. 8

Заметим, что если мы из всех чисел в правильно заполненной таблице вычтем одно и то же число, то получим также правильно заполненную таблицу, поэтому можно считать, что все равные числа в нашей таблице равны 0.

Если одинаковых чисел в нашей таблице не менее 22, то чисел, не равных 0, в ней не более трех. Но это значит, что есть ряд, целиком состоящий из нулей, следовательно, сумма в нем (а значит, и в остальных рядах) равна 0.

По условию задачи в таблице есть ненулевое число a, но тогда обязательно есть еще хотя бы два ненулевых числа b и c (b стоит в той же строке, что и a, а c — в том же столбце). Но если ненулевых чисел всего 3, то число b окажется единственным в своем столбце, а c — в строке, значит, их тоже должно что-то уравновешивать. Таким образом, нулей в таблице не более чем 21.

Верный ответ к этой задаче выбрали около 15% участников, а более трети ребят указали ответ Б.

В варианте для 7–8-х классов отметим две задачи, оцениваемые в 3 балла.

Задача 11. (*7–8-е классы, № 4*) Во сколько раз минутная стрелка на часах вращается быстрее часовой?

(А) 2 (Б) 6 (**В**) 12 (Г) 24 (Д) 60

Правильный ответ к этой задаче указал каждый третий участник, но почти половина ребят обеих параллелей выбрали ответ Д.

Задача 12. (*7–8-е классы, № 9*) Что является квадратом, но не кубом натурального числа?

(А) 8^2 (Б) 5^5 (В) 2^{12} (**Г**) 4^4 (Д) 3^3

С этой задачей справилось около четверти участников (23% семиклассников и 29% восьмиклассников), но более половины участников выбрали ответ А.

Следующая задача оказалась наиболее трудной из тех, что оценивались в 4 балла (около 20% верных ответов).

Задача 13. (*7–8-е классы, № 20*) Федя выписывает натуральные числа: 1, 2, 3, ... После того, как он написал 2015-ю цифру, у него кончились чернила. Какую цифру он написал последней?

(**А**) 0 (Б) 1 (В) 6 (Г) 7 (Д) 8

Решение. Федя написал все 9 однозначных чисел — это 9 цифр. Затем Федя написал все двузначные числа — их 90 (от 10 до 99), таким образом, он написал еще 180 цифр. Далее Федя начал писать трехзначные числа. Ему осталось написать $2015 - 180 - 9 = 1826$ цифр. Разделив 1826 на 3, получаем неполное частное 608 и остаток 2. Значит, Федя полностью напишет 608 трехзначных чисел (от 100 до 707), потом напишет еще две цифры, и чернила кончатся. Таким образом, он напишет первые две цифры числа 708 и закончит цифрой 0.

Среди задач, оцениваемых в 4 балла, отметим еще одну.

Задача 14. (*7–8-е классы, № 19*) Женя провела в правильном n-угольнике несколько непересекающихся диагоналей (они могут иметь общие концы). Эти диагонали разделили n-угольник на три треугольника, четыре четырехугольника и пять пятиугольников. Чему равно n?

(А) 32 (**Б**) 28 (В) 26 (Г) 25 (Д) 24

Решение. Заметим, что в итоге получилось $3 + 4 + 5 = 12$ частей, а изначально был один n-угольник. Значит, Женя сделала 11 разрезов (так как каждый разрез добавляет одну часть). Всего у полученных частей $3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 5 = 9 + 16 + 25 = 50$ вершин. Каждый разрез (так как он шел по диагонали) добавлял к суммарному числу вершин всех частей ровно две (разрез идет от вершины к вершине, и именно эти две вершины «раздваиваются»). То есть к n добавилось число 22, и получилось 50, значит, $n = 28$.

С этой задачей справилась примерно четверть участников.

Самой трудной в этом варианте оказалась следующая задача (усложненный вариант рассмотренной выше задачи № 28 для 5–6-х классов).

Задача 15. (*7–8-е классы, № 26*) На прямой расположено пять точек. Все попарные расстояния между ними в порядке возрастания — это 2, 4, 5, 7, 8, k, 13, 15, 17, 19. Чему равно k?

(А) 9 (Б) 10 (В) 11 (Г) 12

(Д) невозможно определить

Решение. Обозначим данные точки A, B, C, D, E (рис. 9).

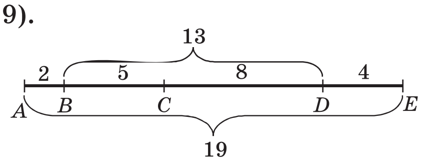


Рис. 9

Ясно, что самое большое расстояние — это расстояние между крайними точками, то есть $AE = 19$. Теперь заметим, что $AB + BE = AC + CE = AD + DE = 19$. В нашем списке есть пары с такой суммой: 2 и 17, 4 и 15, ясно, что среди них нет расстояний AC и CE (оба эти отрезка состоят из двух частей, а величин меньше 2 и 4 у нас нет). Значит, меньшие числа в этих двух парах — это расстояния AB и DE. Пусть $AB = 2$, а $DE = 4$ (можно и наоборот), в любом случае $BD = 19 - 2 - 4 = 13$. Значит, сумма $BC + CD$ равна 13.

В нашем списке такую сумму дают только числа 5 и 8. Почему они обязательно окажутся длинами BC и CD? Если бы нашлась еще одна пара чисел с такой суммой, то это были бы 7 и k (остальные числа уже заняты) и k было бы равно 6, но по условию задачи k находится между 8 и 13.

Теперь нам остается понять, какой из отрезков BC и CD равен 5. Легкий перебор показывает, что это BC. Тогда $CE = AE - AB - BC = 19 - 2 - 5 = 12$, это и есть недостающая длина.

С этой задачей справились примерно 12% участников обеих параллелей.

Ненамного легче оказалась и задача «на проценты».

Задача 16. (*7–8-е классы, № 27*) Придя в магазин, Винни-Пух обнаружил, что горшочек для меда подорожал на 50%, а мед подешевел на 50%, теперь горшочек и мед в нем стоят поровну. Как изменилась цена горшочка с медом?

(А) уменьшилась на 25%

(Б) увеличилась на 25%

(В) уменьшилась на 20%

(Г) увеличилась на 20%

(Д) не изменилась

Решение. Пусть мед в горшочке и горшочек стали стоить A рублей. Горшочек подорожал на 50%. Значит, A — это 150% исходной цены горшочка, то есть изначально горшочек стоил $\frac{2}{3}A$ рублей. Мед подешевел на 50%, то есть A — это 50% от исходной цены меда, значит, мед стоил $2A$ рублей. То есть раньше горшочек и мед стоили $2A+\frac{2}{3}A=2\frac{2}{3}A$, а теперь стоят $A + A = 2A$. Так как

$$2A : 2\frac{2}{3}A\cdot 100\% = \frac{2\cdot 3}{8}\cdot 100\% = 75\%,$$

то горшочек с медом подешевел на 25%.

Очень многим понравился ответ Д, его выбрали более 40% участников, в то время как верный ответ указали 18% семиклассников и 20% восьмиклассников.

Среди задач, оцениваемых в 3 балла, для старших участников наиболее трудными оказались следующие две.

Задача 17. (*9–10-е классы, № 4*) Во сколько раз секундная стрелка на часах вращается быстрее часовой?

(А) 3600 (Б) 720 (В) 144 (Г) 120 (Д) 24

Так же, как и задача № 4 для 7–8-х классов, эта задача оказалась для многих участников коварной ловушкой: примерно две трети из них выбрали ответ 3600, а верный ответ указали всего 15% девятиклассников и 18% десятиклассников.

Задача 18. (*9–10-е классы, № 6*) Сколько существует простых чисел, кубы которых меньше 1001?

(А) 3 (Б) 4 (В) 5 (Г) 10 (Д) более 10

И это тоже ловушка: на самом деле, нас спрашивают, сколько простых чисел в первом десятке. Около 45% участников обеих параллелей растерялись и выбрали не имеющий отношения к делу ответ Г. Верно ответили 24% девятиклассников и 31% десятиклассников.

Среди задач, оцениваемых в 4 балла, отметим две.

Задача 19. (*9–10-е классы, № 12*) Незнайка говорит правду с полуночи до полудня и лжет с полудня до полуночи. Ежедневно он сочиняет стихи с 11:00 до 15:00. Сколько часов в сутках, когда он может гордо заявлять: «Сейчас я сочиняю стихи!»?

(А) 1 (Б) 4 (В) 10 (Г) 12 (Д) 20

Решение. С полуночи до полудня Незнайка говорит правду, поэтому сказать «Сейчас я сочиняю стихи!» он может только тогда, когда он их действительно сочиняет: с 11:00 до 12:00, то есть 1 час. С полудня до полуночи он лжет, поэтому сказать «Сейчас я сочиняю стихи!» он может только тогда, когда их не сочиняет: с 15:00 до 24:00, то есть 9 часов. Всего получается 1 + 9 = 10 часов.

Около половины участников не заметили второй возможности и выбрали ответ 1 час; верный ответ указали 16% девятиклассников и 21% десятиклассников.

Задача 20. (*9–10-е классы, № 15*) В прямоугольном треугольнике с катетами 4 и 5 провели медиану и высоту из вершины прямого угла. Чему равно произведение их длин?

(**А**) 10 (Б) $2\sqrt{41}$ (В) $5\sqrt{41}$

(Г) 20 (Д) $\frac{1}{2}\sqrt{41}$

Решение. В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы. Если мы высоту, опущенную на гипотенузу, умножим на половину гипотенузы, то получим площадь треугольника. Но площадь прямоугольного треугольника с катетами 4 и 5 равна 10, это и есть искомое произведение.

В завершение нашего обзора рассмотрим две задачи, оцениваемые в 5 баллов.

Задача 21. (*9–10-е классы, № 23*) На доске написано 10 различных чисел. Вася подчеркнул каждое число, которое равно произведению всех остальных девяти чисел. Какое наибольшее количество чисел может быть подчеркнуто?

(А) 1 (**Б**) 2 (В) 3 (Г) 9 (Д) 10

Решение. Заметим, что если какое-то число a в данном списке равно произведению остальных, то произведение всех десяти чисел равно квадрату числа a. Следовательно, если еще найдутся числа с таким свойством, то их квадраты также должны равняться a^2. Но, кроме a, этому условию отвечает только число $-a$. Итак, Вася не мог подчеркнуть более двух чисел. Подчеркнуть два числа он мог. Например, в списке $1, -1, \frac{1}{2}, -2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, 4, \frac{1}{5}, 5$ подчеркнутыми окажутся числа 1 и −1.

Верный ответ к этой задаче выбрали около 16% участников. Среди неверных ответов самым популярным был ответ А, его выбрали более четверти участников.

Задача 22. (*9–10-е классы, № 25*) На рисунке 10 изображен график функции $y = f(x)$. На одном из рисунков А–Д изображен график функции $y = xf(x)$. На каком?

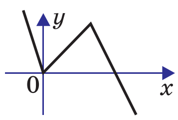
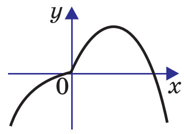
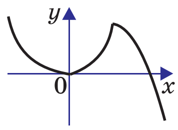


Рис. 10

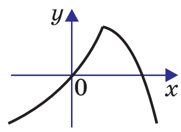
(А)



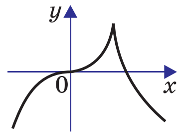
(Б)



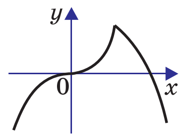
(В)



(Г)



(**Д**)



Решение. Обозначим через a абсциссу точки правого «излома» графика функции $y = f(x)$. На отрезке $[0; a]$ функция $f(x)$ имеет вид $y = kx$, где $k > 0$. Поэтому функция $y = xf(x)$ будет иметь на этом отрезке вид $y = kx^2$, где $k > 0$, значит, вариант А надо отбросить (там явно изображена часть параболы, обращенной ветвями вниз).

На луче $(-\infty; 0)$ функция $f(x)$ имеет вид kx, где $k < 0$. Поэтому $x \cdot f(x) = kx^2$, $k < 0$, значит, варианты Б и В тоже не подходят (на этих рисунках левые части графиков принадлежат параболам с ветвями, направленными вверх).

Наконец, на луче $[a; +\infty)$ функция $f(x)$ имеет вид $kx + b$, где $k < 0$, следовательно, $x \cdot f(x) = kx^2 + bx$, $k < 0$. График такой функции — парабола, ветви которой направлены вниз, так что вариант Г тоже отбрасываем. Оставшийся вариант Д можно получить, например, если функция $f(x)$ равна $-2x$ при $x \le 0$, x при $0 < x \le 2$ и $6 - 2x$ при $x > 2$.

Эта задача оказалась самой трудной во всем варианте, ее решили 14% девятиклассников и 16% десятиклассников.

«Географическая головоломка».
У стенда с головоломками на Фестивале науки, Ростов-на-Дону, 2015 г.
Автор фото: Н. Авилов

А. БЛИНКОВ, Е. ГОРСКАЯ,
В. ГУРОВИЦ, А. ИВАНИЩУК,
И. РАСКИНА, А. ХАЧАТУРЯН,
Д. ШНОЛЬ,
г. Москва

XII ТВОРЧЕСКИЙ КОНКУРС УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

20 сентября 2015 года в Москве состоялся XII Творческий конкурс учителей математики. Он был организован Московским центром непрерывного математического образования совместно с Центром педагогического мастерства, журналом «Математика. Первое сентября», Ассоциацией учителей математики г. Москвы и математическим факультетом Московского педагогического государственного университета при поддержке Департамента образования г. Москвы и благотворительного фонда «Пери» Зиявудина Магомедова.

Конкурс был посвящен памяти бессменного члена жюри, учителя математики Елены Борисовны Гладковой, ушедшей из жизни в мае 2015 года.

Информацию о предыдущих творческих конкурсах можно найти на сайте www.mccme.ru и в журнале «Математика». Кроме того, материалы нескольких первых конкурсов, а также материалы первых заочных конкурсов учителей математики опубликованы в книжке: *Блинков А.Д., Горская Е.С., Ященко И.В.* Творческие конкурсы учителей математики (М.: МЦНМО, 2008).

По установившейся традиции победители и призеры предыдущего конкурса не могли стать победителями или призерами этого, что не помешало некоторым из них принять участие в олимпиаде вне конкурса и показать результаты на уровне победителей и призеров. Вместе с тем, как и в прошлые годы, для расширения рамок проведения конкурса на него были персонально приглашены (за счет организаторов) победители и призеры X Заочного конкурса учителей математики, который был проведен в первой половине года при активном участии журнала «Математика», а также победители и призеры интернет-тура XI очного конкурса. Поэтому среди участников очного тура конкурса, помимо учителей из Москвы и Подмосковья, были учителя из Башкортостана, Дагестана, Татарстана, Якутии, Санкт-Петербурга и Челябинска.

Задания для проведения конкурса были подготовлены методической комиссией, работавшей на базе МЦНМО. В эту комиссию и в жюри олимпиады вошли сотрудники МЦНМО, ЦПМ и учителя г. Москвы.

Вариант традиционно включал в себя 10 заданий, разбитых на два блока. Первый блок — математические задачи, которые требовалось решить; второй блок — методический, включавший в себя «задачи», взятые из реальных математических источников, и их «решения», в которых требовалось найти ошибки или восполнить пробелы.

В вариант были включены задания по алгебре, основам математического анализа, комбинаторике, алгоритмам и геометрии. Каждое задание оценивалось исходя из 10 баллов.

Очный тур конкурса по традиции проходил в помещении математического факультета МПГУ. Проведение конкурса в стенах факультета обеспечил заведующий кафедрой элементарной математики и методики профессор В.А. Смирнов, которому помогали студенты факультета. На выполнение заданий очного тура отводилось 4,5 часа.

Для тех учителей, которые не имели возможности приехать на очный тур, был проведен заочный тур конкурса в Интернете. Одновременно с началом конкурса в Москве на портале МЦНМО были выложены задания конкурса и анкета. Участникам заочного тура на выполнение заданий было выделено 5 часов.

В интернет-туре конкурса приняли участие учителя из многих городов России, а также из Беларуси и Казахстана.

Творческий конкурс являлся открытым для всех желающих, для участия в очном туре достаточно было только предварительно зарегистрироваться, а для участия в интернет-туре не требовалось и этого.

Всем участникам конкурса была обеспечена полная анонимность участия и объективность проверки, так как все работы были зашифрованы. Каждый участник мог узнать результат проверки только своей работы. Победителями или призерами конкурса могли стать только школьные учителя, имеющие в текущем учебном году не менее 9 часов в неделю преподавательской нагрузки. Возможность стать победителем или призером интернет-тура не зависела от успешности участия в предыдущих конкурсах.

По итогам конкурса были выделены две номинации: победители (набравшие не менее чем 72 балла) и призеры (набравшие более 50 баллов). Все они награждены специальными дипломами. Кроме того, победители очного тура конкурса получат индивидуальные денежные гранты фонда «Пери», а призеры очного тура (а также победители и призеры интернет-тура) — научно-популярную и методическую литературу, предоставленную МЦНМО. Списки победителей и призеров публикуются в алфавитном порядке.

Победители очного тура

- *Барышев Игорь Николаевич*, школа № 2101, г. Москва;
- *Блинков Юрий Александрович*, школа № 218, г. Москва;
- *Вольфсон Георгий Игоревич*, ФМЛ № 366, г. Санкт-Петербург;
- *Мухин Дмитрий Геннадьевич*, школа № 179 и школа № 91, г. Москва;
- *Немировская Ирина Михайловна*, лицей № 1533, г. Москва;
- *Уколов Игорь Сергеевич*, школа № 315, г. Москва;
- *Франк Владислав Игоревич*, ПФМЛ № 239, г. Санкт-Петербург.

Призеры очного тура

- *Афанасьева Виктория Викторовна*, школа № 292, г. Санкт-Петербург;
- *Березкин Василий Александрович*, школа № 192, г. Москва;
- *Бычкова Лидия Олеговна*, гимназия № 1514, г. Москва;
- *Васянин Сергей Иванович*, лицей «Вторая школа», г. Москва;
- *Захарова Виктория Федоровна*, ФМЛ № 366, г. Санкт-Петербург;
- *Крачковский Сергей Михайлович*, гимназия № 1514, г. Москва;
- *Михалин Дмитрий Александрович*, школа № 345, г. Москва;
- *Наконечный Никита Александрович*, лицей «Вторая школа», г. Москва;
- *Саханевич Михаил Владимирович*, лицей № 153, г. Уфа;
- *Сгибнев Алексей Иванович*, школа-интернат «Интеллектуал», г. Москва;
- *Софронов Александр Васильевич*, Верхневилюйская республиканская гимназия, Республика Саха (Якутия);
- *Цорин Борис Иосифович*, школа № 16, г. Балашиха, Московская обл.;
- *Червяков Сергей Валерьевич*, лицей № 1511, г. Москва;
- *Шершнев Евгений Федорович*, ФМШ № 2007, г. Москва;
- *Шкловер Александр Владимирович*, школа № 2, г. Кубинка, Московская обл.
- *Щербина Алиса Витальевна*, школа № 29, г. Химки, Московская обл.;
- *Эвнин Александр Юрьевич*, ФМШ № 31 и ФМШ № 35, г. Челябинск.

Результат на уровне победителей показал *Эльман Игорь Александрович* (школа № 218, г. Москва), а результаты на уровне призеров — *Забелин Алексей Вадимович* (школа-интернат «Интеллектуал», г. Москва), *Костенко Елена Игоревна* (школа № 444, г. Москва), *Ланин Олег Юрьевич* (школа № 2086, г. Москва), *Михайлова Екатерина Владимировна* (лицей № 1580, г. Москва), *Пукас Юрий Остапович* (школа № 2, г. Троицк), *Синякова Стелла Леонидовна* (школа № 315, г. Москва), *Соколова Татьяна Владимировна* (лицей № 1557, г. Москва), *Федулкин Алексей Леонидович* (школа № 171, г. Москва), но они выступали вне конкурса.

Победители интернет-тура

- *Давлетбаев Марсель Фанильевич*, лицей № 2, г. Казань;
- *Конаныхин Алексей Михайлович*, ФМН НИШ, г. Алматы, Республика Казахстан.

Призеры интернет-тура

- *Баева Любовь Владимировна*, гимназия № 26, г. Набережные Челны;
- *Варенье Наталия Захаровна*, школа № 473, г. Санкт-Петербург;
- *Власова Светлана Николаевна*, лицей № 130, г. Новосибирск;
- *Минниахметов Айдар Расулович*, гимназия № 93, г. Уфа;
- *Мурашова Марина Николаевна*, лицей № 130, г. Новосибирск;
- *Равчеев Никита Геннадьевич*, лицей № 6 «Перспектива», г. Красноярск.

Кроме того, специальным решением оргкомитета решено отметить участников очного тура, не ставших победителями или призерами, но набравших не менее чем 35 баллов, **похвальными грамотами**.

Условия, решения, комментарии и критерии проверки

Каждое задание оценивается исходя из 10 баллов.

I. Решите задачи

1. Корни трехчлена. (*Фольклор*.) Квадратный трехчлен $f(x) = x^2 + ax + b$ имеет два корня, один из которых лежит внутри отрезка [0; 1], а другой — вне этого отрезка. Определите знак $f(b)$.

Ответ: $f(b) < 0$.

Решение. График данного трехчлена — парабола, ветви которой направлены вверх.

Способ I. Заметим, что

$$f(b) = b^2 + ab + b = b(a + b + 1) = f(0) \cdot f(1).$$

Из непрерывности квадратного трехчлена и из условия задачи следует, что числа $f(0)$ и $f(1)$ имеют разные знаки (рис. 1 и 2). Следовательно, $f(b) < 0$.

Способ II. Пусть $x_1 \in (0; 1)$, $x_2 \notin [0; 1]$. По теореме Виета $x_1 \cdot x_2 = b$, значит, $x_2 = \dfrac{b}{x_1}$. Тогда $|x_2| > |b|$. Учитывая, что $x_1 > 0$, рассмотрим два случая.

1) Если $x_2 < 0$, то

$$b = x_1 \cdot x_2 < 0 \text{ и } x_2 < b.$$

Следовательно, $b \in (x_2;\ x_1)$, то есть $f(b) < 0$ (см. рис. 1).

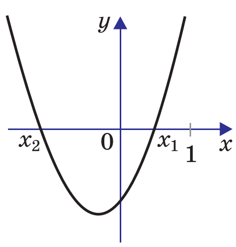


Рис. 1

2) Если $x_2 > 1$, то

$$b = x_1 \cdot x_2 > x_1 \text{ и } x_2 > b.$$

Следовательно, $b \in (x_1;\ x_2)$, то есть $f(b) < 0$ (см. рис. 2).

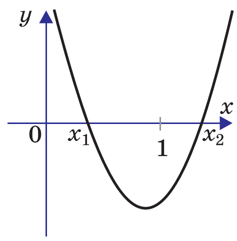


Рис. 2

Критерии проверки:

– полное обоснованное решение — 10 баллов;

– приведено верное рассуждение, основанное на том, что корень может совпадать с концом данного отрезка, — 8 баллов;

– при решении вторым способом рассмотрен только один случай — 5 баллов;

– приведен только верный ответ — 1 балл.

2. Ломаная. (*Фольклор*.) В окна комнаты светит солнце, а в комнате неподвижно висит в воздухе четырехзвенная замкнутая ломаная. Ее тень на стене имеет форму параллелограмма. Через некоторое время тень передвинулась, но по-прежнему осталась параллелограммом. Докажите, что и сама ломаная — параллелограмм. (*Считаем, что солнечные лучи параллельны друг другу*.)

Решение. Пусть $ABCD$ — данная ломаная, а $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$ — ее тени (рис. 3).

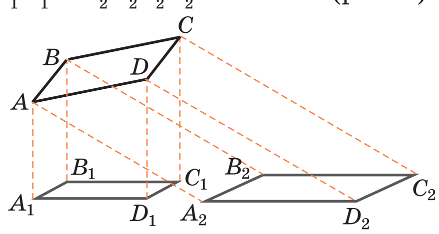


Рис. 3

Тогда $AA_1 \parallel BB_1$, поэтому точки A, B, A_1 и B_1 лежат в одной плоскости. Аналогично, точки C, D, C_1 и D_1 также лежат в одной плоскости. Более того, эти плоскости параллельны, так как пересекаются плоскостью стены по параллельным прямым A_1B_1 и C_1D_1 (две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости). Таким же рассуждением получим, что параллельны плоскости ABB_2A_2 и CDD_2C_2.

Заметим, что если $\alpha \parallel \beta$ и $\alpha_1 \parallel \beta_1$, $\alpha \cap \alpha_1 = a$, $\beta \cap \beta_1 = b$, то $a \parallel b$. Действительно, в этом случае $a \parallel \beta$ и $a \parallel \beta_1$, поэтому, проведя плоскость γ через прямую a и точку $B \in b$, получим, что γ пересекает β и β_1 по прямым, содержащим точку B и параллельным прямой a. Но такая прямая единственная, а именно, это прямая b.

Воспользовавшись этим утверждением, получим, что $AB \parallel CD$. Аналогично доказывается параллельность BC и AD, то есть $ABCD$ — параллелограмм.

Критерии проверки:

– полное обоснованное решение — 10 баллов;

– приведено верное в целом рассуждение, содержащее некоторые пробелы или неточности, — 7–9 баллов;

– доказано только, что плоскости, содержащие AB и CD, параллельны прямой проектирования, — 4 балла;

– этот же факт указан, но не обоснован, и решение не завершено — 2 балла;

– доказана только параллельность плоскостей — 2 балла.

3. Натуральные числа. (*Олимпиада, Республика Казахстан, 2010, 11-й класс.*) Натуральное число $n > 1$ таково, что десятичная запись числа $9997 \cdot n$ содержит только нечетные цифры. Найдите наименьшее возможное значение n.

Ответ: 3335.

Решение. Из условия следует, что последняя цифра числа n должна быть нечетной. Преобразуем:

$$9997n = (10\,000 - 3)n = 10\,000n - 3n.$$

Последняя цифра перед четырьмя нулями в конце числа $10\,000n$ нечетная, и если $3n < 10\,000$, то при вычитании эта цифра уменьшится на 1 и получится четная цифра. Значит, $3n \geq 10000$, то есть $n > 3333$. Наименьшее нечетное значение n, удовлетворяющее этому неравенству, это $n = 3335$.

Проверим: $9997 \cdot 3335 = 33\,339\,995$ — удовлетворяет условию задачи.

Критерии проверки:

– полное обоснованное решение — 10 баллов;

– приведено верное в целом рассуждение, содержащее некоторые пробелы или неточности, — 7–9 баллов;

– оценка получена верно, но пример не приведен — 5 баллов;

– приведен только верный пример — 2 балла;

– приведен только верный ответ — 1 балл.

4. Платок. (*Е. Ермакова.*) Постиран квадратный платок площади 1 м². Для просушки его вешают на веревку так, чтобы центр платка был на веревке. За час успевают высохнуть только те части платка, которые не перекрывают друг друга. Какова наибольшая суммарная площадь этих частей?

Ответ: $3 - 2\sqrt{2}$.

Решение. Сформулируем условие задачи на языке геометрии. Через центр квадрата со стороной 1 метр проведена прямая, не совпадающая с его осью симметрии. Одна из получившихся частей квадрата отражена относительно этой прямой (рис. 4). Каково наибольшее значение суммы площадей прямоугольных треугольников, выделенных цветом?

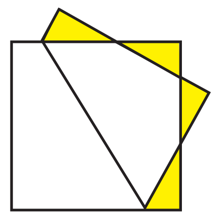


Рис. 4

Докажем, что эти четыре треугольника равны между собой. Для этого рассмотрим квадрат, симметричный данному относительно той же прямой (рис. 5).

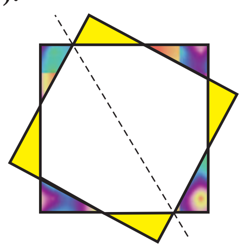


Рис. 5

Разноцветные треугольники разбиваются на пары, симметричные относительно оси, а соседние треугольники одного цвета получаются друг из друга поворотом на 90° вокруг общего центра двух квадратов (так как при таком повороте каждый квадрат переходит в себя). Таким образом, все восемь прямоугольных треугольников, выделенных на рисунке 5, равны друг другу. Кроме того, из этих рассуждений следует, что периметр каждого треугольника равен стороне квадрата.

Далее можно рассуждать по-разному.

Способ I (геометрический). Рассмотрим один из прямоугольных треугольников. Докажем, что из всех треугольников с данным углом и данным периметром наибольшую площадь имеет равнобедренный.

Площадь треугольника можно вычислить по формуле $S = pr$ (p — полупериметр, r — радиус вписанной окружности). Площадь будет наибольшей, если r принимает наибольшее значение. Пусть в треугольнике ABC фиксирован угол A, тогда рассмотрим вписанную окружность треугольника ABC и вневписанную окружность, касающуюся стороны BC и продолжений двух других сторон в точках P и Q (рис. 6).

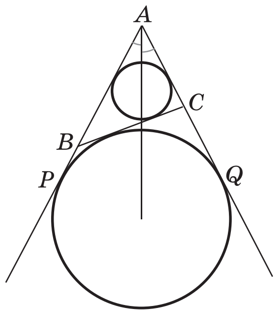


Рис. 6

Так как $AP = AQ = p$, то положение вневписанной окружности не зависит от положения касательной BC. Кроме того, радиусы окружностей, вписанных в угол BAC, увеличиваются по мере удаления центра от вершины A. Значит, из всех окружностей, вписанных в треугольник ABC, наибольший радиус будет у той, которая касается вневписанной. А это достигается, если $AB = AC$.

Комментарий. Отметим, что в нашем случае фиксированный угол равен 90°, а вневписанная окружность — это окружность, вписанная в квадрат.

Таким образом, сумма S площадей четырех треугольников, выделенных на рисунке 4, равна $2x^2$, где x — длина катета равнобедренного прямоугольного треугольника.

Значение x можно найти, например, из уравнения

$$x + x\sqrt{2} + x = 1, \quad x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad S = 3 - 2\sqrt{2}.$$

Способ II (аналитический). Пусть длины катетов одного из прямоугольных треугольников равны x и y, тогда искомая площадь $S = 2xy$ (см. рис. 5). Тогда:

$$x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = 1, \quad y = \frac{2x-1}{2x-2},$$

а

$$S(x) = 2x \cdot \frac{2x-1}{2x-2} = 2x + 1 + \frac{1}{x-1},$$

где $x \in (0; 1)$. Найдем наибольшее значение этой функции на этом промежутке:

$$S'(x) = 2 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 4x + 1}{(x-1)^2};$$

критические точки функции:

$$x = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Интервалу (0; 1) принадлежит только одна из них: $x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$. При «переходе» через эту точку знак производной меняется с «+» на «–», поэтому это точка максимума. В силу непрерывности функции на интервале (0; 1) и единственности точки максимума, в этой точке функция принимает наибольшее значение:

$$S\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 1 + \frac{1}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - 1} = 3 - 2\sqrt{2}.$$

Комментарий. Аналитическое рассуждение можно провести и не используя производную. Пусть

$$\frac{x+y}{2} = m,$$

тогда

$$x = m - n,\ y = m + n,\ S = 2(m^2 - n^2).$$

Из уравнения

$$x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = 1$$

получим связь между m и n:

$$2m + \sqrt{2m^2 + 2n^2} = 1.$$

Из этого равенства видно, что чем меньше по модулю значение n, тем больше значение m. С другой стороны, при уменьшении по модулю n и увеличении m значение $S = 2(m^2 - n^2)$ возрастает. Следовательно, наибольшее значение достигается, если $n = 0$, то есть если $x = y$.

Критерии проверки:

– полное обоснованное решение — 10 баллов;

– приведено верное в целом рассуждение, содержащее некоторые пробелы или неточности, — 8–9 баллов;

– приведено верное в целом рассуждение, но допущена вычислительная ошибка в заключительной части — 7 баллов;

– при геометрическом способе решения использовано, но не доказано утверждение о наибольшей площади треугольника с данным периметром и углом — 7 баллов;

– равенство треугольников строго не доказано, но присутствует идея или план такого рассуждения, после чего приведены верные аналитические рассуждения и получен верный ответ — 5 баллов;

– равенство треугольников никак не обосновано, далее проведены верные аналитические рассуждения, использующие это равенство, и получен верный ответ — 3 балла;

– равенство треугольников доказано, но не обоснована их равнобедренность и получен верный ответ — 3 балла;

– задача не решена, но есть начальные «продвижения» — 1 балл;

– приведен только верный ответ — 1 балл.

5. Многочлен. (*Фольклор.*) Пусть $f(x)$ такой многочлен степени n, что для всех $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ $f(k)=\frac{1}{k+1}$. Найдите $f(n + 1)$.

Ответ: $\frac{(-1)^n+1}{n+2}$.

Решение. Рассмотрим

$$P(x) = (x + 1)f(x) - 1. \qquad (*)$$

Это многочлен степени $n + 1$, имеющий корни $0, 1, 2, \ldots, n$ (всего корней $n + 1$). Следовательно,

$$P(x) = Cx\,(x - 1)(x - 2) \cdot \ldots \cdot (x - n), \qquad (**)$$

где $C \in \boldsymbol{R}$. Из равенства (*) получим, что $P(-1) = -1$, тогда из равенства (**) следует, что

$$C=\frac{(-1)^n+1}{n+2}.$$

Таким образом, из (*):

$$P(n + 1) = (n + 2)f(n + 1) - 1,$$

а из (**):

$$P(n + 1) = C(n + 1)n(n - 1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = C(n + 1)!.$$

Приравнивая правые части этих равенств, получим:

$$f(n+1)=\frac{C(n+1)!+1}{n+2}=\frac{(-1)^n+1}{n+2}.$$

Критерии проверки:

– полное обоснованное решение — 10 баллов;

– приведено верное в целом рассуждение, содержащее некоторые пробелы или неточности, — 8–9 баллов;

– верно и обоснованно найден вид многочлена, но константа не определена или определена неверно — 7 баллов;

– верный ответ получен путем рассмотрения частных случаев — 2 балла;

– приведен только верный ответ — 1 балл.

II. Методический блок

В заданиях № 6 и № 7 могут содержаться математические ошибки (как в условиях «задач», так и в «ответах» и «решениях»). Если некорректно условие «задачи», то объясните, почему это так и как его скорректировать (если это возможно), чтобы «решение» стало верным. Если неверно только «решение», то укажите все ошибки, сделав подробные пояснения, а затем приведите верное решение.

6. Система уравнений. (*Рыжик В.И. 30 000 уроков математики. Книга для учителя. М.: Просвещение, 2003.*)

«Задача». При каких значениях параметра a система уравнений

$$x^2 = 1 - y^2 = y - |a|$$

имеет единственное решение?

«Ответ»: таких a нет.

«Решение». Рассмотрим уравнение

$$1 - y^2 = y - |a| \Leftrightarrow y^2 + y - (|a| + 1) = 0.$$

Так как система имеет единственное решение, то это уравнение также должно иметь единственное решение, то есть

$$D = 1 + 4(1 + |a|) = 0.$$

Но последнее равенство не выполняется ни для каких значений a.

Комментарий. В условии «задачи» ошибок нет. В приведенном «решении» не учтено, что рассматриваемое квадратное уравнение может иметь и два корня: y_1 и y_2, но условие «задачи» может выполняться, если одно из двух уравнений ($x^2 = y_1 - |a|$ и $x^2 = y_2 - |a|$) не имеет корней, а другое имеет один корень.

Учитывая это, можно довести «решение» до верного. Действительно, пусть $D > 0$, тогда

$$y_1=\frac{-1-\sqrt{D}}{2},\quad y_2=\frac{-1+\sqrt{D}}{2}.$$

Заметим, что $y_1 - |a| < 0$, значит, уравнение $x^2 = y_1 - |a|$ корней не имеет. Уравнение $x^2 = y_2 - |a|$ имеет единственный корень, если $x = 0$. В этом случае:

$$\frac{-1+\sqrt{D}}{2}=|a| \Leftrightarrow \sqrt{4|a|+5}=2|a|+1 \Leftrightarrow |a|=1.$$

Ответ: при $a = \pm 1$.

Возможен и *другой способ решения*. Заметим, что если $(x_0;\ y_0)$ является решением системы, то решением является и $(-x_0;\ y_0)$. Значит, необходимым условием единственности решения системы является $x_0 = 0$. Тогда из уравнения $x^2 = 1 - y^2$ следует, что $y = \pm 1$, а из уравнения $1 - y^2 = y - |a|$ — что $y = 1$, $|a| = 1$.

Проверим достаточность полученного условия, так как при $|a| = 1$ у системы могут оказаться и другие решения, кроме (0; 1). Подставив $|a| = 1$ в уравнение $1 - y^2 = y - |a|$, получим квадратное уравнение $y^2 + y - 2 = 0$. Его корни $y_1 = 1$ и $y_2 = -2$. Тогда $x^2 = 0$ или $x^2 = -3$, то есть $x = 0$. Значит, других решений нет.

Критерии проверки:

Баллы за пункты 1 и 2 суммируются.

1. Верно указана и пояснена ошибка, допущенная в «решении», — 5 баллов;

– ошибка в «решении» указана, но не объяснена — 3 балла;

– указано только, что получен неверный «ответ», — 1 балл.

2. Приведено полное обоснованное решение — 5 баллов;

– приведено верное в целом решение, содержащее некоторые пробелы, — 4 балла;

– при решении вторым способом никак не проверена достаточность полученного условия — 3 балла;

– приведено графическое решение системы, но никак не обосновано отсутствие других решений — 2 балла.

7. Школьники. (*Предложил Р. Алишев; по материалам II этапа ВОШ 2014/15 в Республике Татарстан.*)

«Задача». Десять школьников по окончании 10-го класса решили поступать либо на мехмат, либо на физфак. Некоторые школьники дружат между собой. Каждый понедельник с момента окончания 10-го класса они созваниваются и обсуждают планы. Если большинство друзей некоторого школьника хотят поступать не туда, куда он, то к следующему понедельнику он принимает мнение этого большинства. Докажите, что до окончания школы их мнения устоятся и больше меняться не будут.

«Решение». Всего в этой группе 45 пар школьников, из них n пар друзей, которые собираются поступать в разные места. Пусть Петя собирается на физфак, k его друзей — на мехмат, а l — на физфак, причем $l < k$. После того, как он переменит мнение, число n уменьшится на k и увеличится на l. Таким образом, после каждой перемены мнений число n уменьшится на $k-l>0$ пар. Ясно, что это может происходить не более 45 раз. Значит, за год (52 недели) процесс перемены мнений завершится.

Комментарий. Утверждение, которое предлагается доказать в условии задачи, неверно. Приведем контрпример. Пусть в этой группе учатся девочки и мальчики. Каждая из девочек дружит с каждым мальчиком, а однополых пар друзей нет. По окончании 10-го класса все девочки решили поступать на мехмат, а все мальчики — на физфак. В таком случае мнения всех школьников будут меняться еженедельно и не устоятся никогда.

Условие задачи станет корректным, если к понедельнику будет менять мнение только один школьник — любой из тех, чьи планы отличались от планов большинства друзей. Соответственно, станет верным и приведенное решение.

Неверное утверждение «доказано» в результате следующей ошибки. В высказывании «После того, как он переменит мнение, число n уменьшится на k и увеличится на l» не учитывается, что вместе с Петей мнение могут переменить и некоторые его друзья. Даже если учитывать только пары с участием Пети, то после очередной перемены мнений число n необязательно уменьшится на $k-l$. А если говорить обо всех парах друзей, то вообще странно ожидать, что изменение числа n зависит только от планов Пети и его друзей.

В исправленном виде задача неоднократно использовалась в различных формулировках. Первоисточником, видимо, является задача А.М. Штейнберга, опубликованная под номером М277 в задачнике «Кванта» (№ 8/1974) в такой формулировке:

Задано несколько красных и несколько синих точек. Некоторые из них соединены отрезками. Назовем точку «особой», если более половины из соединенных с ней точек имеют цвет, отличный от ее цвета. Если есть хотя бы одна особая точка, то выбираем любую особую точку и перекрашиваем ее в другой цвет. Докажите, что через конечное число шагов не останется ни одной особой точки.

Критерии проверки:

Баллы за пункты 1–4 суммируются.

1. Указано, что утверждение, сформулированное в условии «задачи», неверно, — 2 балла.
2. Приведен контрпример для 10 школьников — 3 балла, для меньшего количества школьников — 1 балл.
3. Указана и пояснена ошибка в «решении» — 3 балла.
4. Указано, как можно изменить условие «задачи», чтобы «решение» стало верным, — 2 балла.

8. Общая точка. (*Предложила Е. Гладкова.*) На уроке была предложена следующая задача:

При каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком функции

$$y=\frac{x^4-8x^2+16}{x^2-4x+4}$$

ровно одну общую точку?

Учительница проверила несколько решений. Все, кто взялся за эту задачу, преобразовали выражение:

$$\frac{x^4-8x^2+16}{x^2-4x+4}=\frac{\left(x^2-4\right)^2}{(x-2)^2}=\frac{(x-2)^2(x+2)^2}{(x-2)^2}=(x+2)^2,$$

а далее рассуждали по-разному.

«Решение Вани». Достаточно найти значения k, для которых уравнение $(x+2)^2 = kx$ имеет единственное решение. Это уравнение равносильно квадратному уравнению

$$x^2+(4-k)x+4=0.$$

Его дискриминант

$$D=(4-k)^2-16=k(k-8)$$

равен нулю при $k=0$ и $k=8$.

«Ответ»: 0; 8.

«Решение Тани». Составим уравнение касательной к графику функции $y = (x + 2)^2$ в точке $x_0 = 0$. Так как $y(0) = 4$; $y' = 2(x + 2)$; $y'(0) = 4$, то уравнение имеет вид:

$$y - 4 = 4(x - 0) \Leftrightarrow y = 4x + 4.$$

Эта прямая не может быть задана уравнением вида $y = kx$.

«Ответ»: таких значений k нет.

«Решение Мани». Изобразим график функции $y = (x + 2)^2$ в декартовой системе координат. Из графика видно, что прямая $y = 0$ является касательной к нему.

«Ответ»: 0.

«Решение Ани». Составим уравнение касательной к графику функции $y = (x + 2)^2$ в некоторой точке x_0. Это уравнение имеет вид

$$y = (2x_0 + 4)(x - x_0) + x_0^2 + 4x_0 + 4.$$

Подставив в него (0; 0), получим, что $x_0 = \pm 2$. Тогда $y = 0$ и $y = 8x$.

«Ответ»: 0; 8.

Прокомментируйте каждое «решение», указав все ошибки и недочеты (если они есть). Приведите верное решение (если оно отсутствует).

Комментарий. Общий недостаток всех «решений» — некорректно выполненное преобразование, при котором ученики расширили область определения заданной функции: полученная ими функция $y = (x + 2)^2$ определена для любых значений x, а исходная функция — при $x \neq 2$.

Наиболее далеко от истины «решение» Тани. Таня понимает, что касательная к графику, как правило, имеет с ним одну общую точку, но без всяких на то оснований считает, что это должна непременно быть касательная с абсциссой точки касания $x_0 = 0$. Ход «решения» и «ответы» Вани и Ани были бы верными, если бы речь шла о функции $y = (x + 2)^2$. Но в данной ситуации Ване и Ане прежде всего нужно было проверить, действительно ли найденные ими прямые имеют ровно одну общую точку с графиком исходной функции. Точка с абсциссой $x = 2$ на этом графике выколота, а одна из найденных «касательных» (соответствующая $k = 8$) проходит как раз через эту точку! Таким образом, полученная ими прямая $y = 8x$ решением не является. При этом в «решении» Ани пропущено значение $x_0 = -2$, что скорее всего является опиской, так как далее приведены ответы, соответствующие $x_0 = \pm 2$.

Кроме того, они оба не рассмотрели случай, когда прямая пересекает параболу в двух точках, но одна из них выколота. То, что они из-за этого не потеряли какого-то решения, — счастливая случайность.

Таким образом, кроме проверки, указанной выше, Ване достаточно было подставить $x = 2$ в рассмотренное им уравнение и убедиться, что других значений k, кроме $k = 8$, не найдется. Аня же могла, например, в явном виде рассмотреть прямую, проходящую через начало координат и точку (2; 4), и получить, что эта прямая имеет уравнение $y = 8x$.

Заметим, что в решении Ани абсциссы точек касания явно вычисляются в ходе решения, а Ване еще требуется их найти, завершив решение квадратного уравнения.

Если подходить формально, то к недочетам их записей можно также отнести логически неверное использование союза «и» в записях: $k = 0$ и $k = 8$ (Ваня); $y = 0$ и $y = 8x$ (Аня). Союз «и» в таких записях означает, что оба условия выполняются одновременно, а это не соответствует действительности. Уместнее было бы использовать союз «или» либо найти другую форму записи (например, через точку с запятой). Отметим также, что «решение» Ани требует знания уравнения касательной (10-й класс), а «решение» Вани использует только программный материал 9-го класса.

«Решение» Мани выглядит совершенно неубедительным, однако именно у нее получен верный ответ! Маня, разумеется, неправа, когда пишет, что касательная к графику $y = (x + 2)^2$, проходящая через начало координат, это только прямая $y = 0$. Но утверждение, что из всех прямых вида $y = kx$ только эта прямая имеет единственную общую точку с графиком исходной функции, по счастливой случайности оказывается верным. Кроме того, вряд ли допустимо (как это делает Маня) в качестве обоснования писать «Из графика видно...». На наш взгляд, подобное обоснование может быть приемлемым только в тех случаях, когда речь идет не о вычислении конкретных значений, а о качественном анализе расположения графиков, например, о количестве точек их пересечения, да и то далеко не всегда.

Критерии проверки:

Баллы за пункты 1–4 суммируются.

1. Указана общая ошибка всех «решений» (расширение области определения) — 1 балл.

2. Указана и прокомментирована ошибка в «решении» Тани — 1 балл.

3. Указаны и прокомментированы ошибки в «решениях» Мани, Вани и Ани — по 2 балла за каждое.

4. Приведено верное решение — 2 балла;

– в приведенном решении не рассмотрен случай, когда искомая прямая не является касательной, — 1 балл.

9. Алгоритм. (*Предложил В. Гуровиц; по материалам ЕГЭ-2014 по информатике.*) На ЕГЭ по информатике была предложена задача:

Дана конечная числовая последовательность. Требуется предложить алгоритм поиска двух членов последовательности с наибольшей суммой, причем разность их номеров должна быть не меньше чем 4.

Боря, Вася, Гена и Дима предложили такое «решение»: сначала выбрать из этой последовательности несколько самых больших чисел, а затем перебором найти среди них два искомых числа. При этом Боря выбрал 5 наибольших членов последовательности, Вася выбрал 7, Гена — 8, а Дима — 9.

Оцените «решение» каждого мальчика и обоснуйте свою точку зрения.

Комментарий. Алгоритм, предложенный мальчиками, возможен, но надо выяснить, какое наименьшее количество наибольших членов последовательности надо выбрать. Докажем, что это количество равно восьми.

Действительно, пусть выбрано 7 наибольших чисел и они оказались последовательными членами, причем наибольшее из них — четвертое. Тогда сумма этого числа и какого-то члена последовательности, не вошедшего в выбранные, может оказаться больше, чем сумма двух любых чисел из этой семерки (исключая четвертое), а выбирать ему «в пару» никакое число из отобранных нельзя, так как разность их номеров будет меньше четырех. Например, пусть выбранные числа — это числа 10, 11, 12, 100, 13, 14, 15, идущие в данной последовательности подряд, а среди оставшихся членов последовательности есть число 9.

Пусть выбрано по крайней мере восемь наибольших чисел и A — наибольшее из них, а B — какое-то из этих восьми чисел, стоящее в последовательности на расстоянии от A не менее 4 единиц. Такое число B найдется, так как существует не более шести чисел, находящихся от A на расстоянии, меньшем 4 (три числа перед A и три числа после). Пусть C и D — какие-то два члена последовательности, причем D — не из выбранных восьми. Тогда так как $A \geq C$, а $B \geq D$, то $A + B \geq C + D$.

Следовательно, чтобы найти пару чисел с максимальной суммой, удовлетворяющей условию, достаточно перебрать пары, образованные восемью наибольшими членами последовательности.

Таким образом, идея «решения» у всех мальчиков верная, но, реализовав предложенный алгоритм, Гена и Дима наверняка получат верный ответ, а Боря и Вася — необязательно. При этом понятно, что выбор Димой девяти чисел избыточен.

Отметим, что если бы условие задачи требовало указать и номера членов, удовлетворяющих условию (а не только сами члены последовательности), то предложенный алгоритм оказался бы неверным. Действительно, тогда он не сможет учесть, что в данной последовательности могут быть повторяющиеся числа. В частности, если заданная последовательность постоянная, то в ответе в этом случае должны были быть указаны все возможные пары номеров, различающихся не меньше чем на 4.

Критерии проверки:

Баллы за пункты 1–3 суммируются.

1. Указано, что предложенный алгоритм принципиально возможен, — 1 балл.

2. Доказано, что предложенный алгоритм работает для восьми чисел, но не работает для меньшего количества чисел, — 8 баллов;

– доказано только, что восьми чисел достаточно, — 5 баллов;

– приведен только пример, показывающий, что семи чисел может не хватить, — 3 балла.

3. Верно указано, у кого «решения» верные, — 1 балл.

10. Взаимное расположение. (*Предложил А. Блинков; использован фрагмент из книги: Башмаков М.И. Математика в кармане «Кенгуру». Международные олимпиады школьников. М.: Дрофа, 2010.*) На уроке геометрии обсуждался известный факт:

В треугольнике, отличном от равнобедренного, биссектриса лежит между высотой и медианой, проведенными из той же вершины.

Учитель предложил такое рассуждение:

Пусть в таком треугольнике ABC $AC > AB$, тогда представим, что точка C движется по прямой BC. Когда вершина C «в бесконечности», «медиана», проведенная из вершины A, «параллельна» BC, а «биссектриса», проведенная из вершины A, пересекает BC, поэтому она лежит между медианой и высотой. При перемещении точки C вдоль прямой BC по направлению к точке B медиана не может совпасть с высотой, так как в этом случае AC должно равняться AB. Следовательно, биссектриса по-прежнему будет лежать между медианой и высотой.

1) Оцените строгость рассуждений, исправьте ошибки и недочеты (если они есть), допишите необходимые подробности.

2) Стали бы вы использовать такое рассуждение на уроке и почему?

Комментарии

1. Приведенное рассуждение нельзя признать абсолютно неверным, но оно, конечно, изложено весьма нестрого и содержит существенные пробелы.

Во-первых, никак не объяснено, почему биссектриса находится между медианой и высотой в тот момент, когда вершина C «в бесконечности» (и высота, и биссектриса пересекают BC). Во-вторых, неясно, почему при указанном «движении» точки C в какой-то момент медиана и биссектриса не могут «поменяться местами». В-третьих, не объяснено, почему при этом «движении» биссектриса не может оказаться между стороной AB и высотой.

Введем обозначения: AH — высота, AL — биссектриса, AM — медиана (рис. 7). Первый из указанных пробелов восполнить легко. Достаточно сказать, что угол BAH острый, а если вершина C «в бесконечности», то угол CAH прямой. Следовательно, луч AL находится внутри угла CAH.

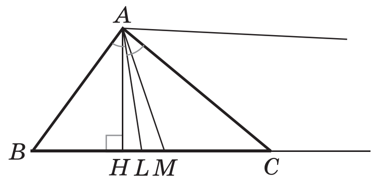


Рис. 7

Для того, чтобы восполнить другие два указанных пробела, следует прежде всего сослаться на непрерывность, причем сделать это аккуратно, — например, так. Зафиксируем вершины A и B треугольника и прямую BC, тогда будет зафиксировано и положение точки H. Рассмотрим две функции: зависимость расстояний LH и MH от длины отрезка CH. Каждая из этих функций непрерывна, так как при малых изменениях длины CH длины LH и MH изменяются мало.

Если расстояние CH очень велико (C — в бесконечности), то $MH > LH$ (*это пояснено в исходном тексте*). Предположим, что найдется положение точки C, при котором $MH < LH$. Тогда, по следствию из теоремы о промежуточном значении непрерывной функции, найдется и такое положение точки C, при котором $MH = LH$, то есть эти точки совпадут. Следовательно, совпадут биссектриса и медиана, но это противоречит тому, что $AC > AB$. Тем самым доказано, что медиана и биссектриса не могут «поменяться местами».

Наконец, считая точку H началом отсчета, а луч HC задающим положительное направление и предположив, что точка L лежит между A и H, получим, что LH (в зависимости от длины CH) принимает как положительные, так и отрицательные значения. Тогда, в силу непрерывности, найдется и такое положение точки C, при котором $LH = 0$, то есть точки L и H совпадут, что опять же противоречит тому, что $AC > AB$.

Отметим, что для восполнения этого пробела можно использовать и *геометрические соображения*, например:

$$\cos\angle BAH = \frac{AH}{AB} > \frac{AH}{AC} = \cos\angle CAH,$$

значит, $\angle BAH = \angle CAH$, поэтому точка L лежит на луче HC. Но в этом случае гораздо проще сравнить затем отрезки BL и BM в произвольном треугольнике, используя свойство биссектрисы, и тогда непрерывность вообще не нужна!

2. Использовать такое рассуждение на уроке геометрии, на наш взгляд, не стоит. Прежде всего потому, что «доведение» его до относительно строгого требует от школьников хорошего понимания непрерывности и умения формализовать рассуждения, с ней связанные. Доказываемое утверждение рассматривается, как правило, в 8-м или 9-м классе, где мало кто из школьников обладает требуемыми знаниями и умениями. Поверхностное же восприятие таких рассуждений может спровоцировать школьников на использование аналогичных рассуждений там, где они будут приводить к неверным выводам. Кроме того, геометрическое доказательство рассматриваемого факта является весьма несложным и доступным.

Если и обсуждать со школьниками приведенное рассуждение, то на уроке по теме «Непрерывность» в курсе «Алгебры и начал анализа» или на внеклассных занятиях, причем делать это имеет смысл только в том случае, когда школьники достаточно подготовлены и обладают сравнительно высокой математической культурой, позволяющей самостоятельно восполнить пробелы, указанные выше.

Критерии проверки:

Баллы за пункты 1–4 суммируются.

1. Верно перечислены пробелы в рассуждениях — по 1 баллу за каждый указанный пробел.

2. Указано, что должна быть ссылка на непрерывность, — 1 балл.

3. Объяснено, каким образом можно восполнить указанные пробелы, — по 1 баллу за каждое объяснение.

4. Приведен разумный комментарий о возможности использования данного рассуждения — 1–3 балла.

В. ДЯТЛОВ,
vndyatlov@yandex.ru,
г. Новосибирск

КАК НАУЧИТЬ(СЯ) РЕШАТЬ ЗАДАЧИ ПО ПЛАНИМЕТРИИ

ТРЕУГОЛЬНИКИ, ТРАПЕЦИИ, ПАРАЛЛЕЛОГРАММЫ

В этой и всех следующих лекциях будет показано, как изложенные в первых двух лекциях [1, 2] идеи можно использовать при решении задач. Здесь разобраны примеры с активным участием треугольника, трапеции или параллелограмма. Наиболее богатая свойствами фигура, конечно, треугольник, в связи с чем задачи, связанные с трапецией или параллелограммом, нередко переходят в задачи с участием треугольника.

В процессе анализа задач всегда будем опираться на материал лекций 1, 2, в частности, использовать нумерацию в наборе шаблонов из [1]. Как и лекции [1, 2], эта и все следующие лекции являются журнальной версией материалов из пособия [3]. Разобранные примеры взяты в основном из [4, 5].

Пример 1. В прямоугольном треугольнике ABC точка M делит гипотенузу AC в отношении $1 : 3$, считая от вершины A. Известно, что отрезок BM пересекает биссектрису AN в точке K так, что $AK = 3$, $KN = 1$. Найти стороны треугольника ABC.

В условии есть два повода начать построение чертежа с полуокружности —наличие прямоугольного треугольника и биссектрисы. Нарисуем полуокружность с диаметром AC, возьмем на ней точку B и соединим ее с точками A и C, получив тем самым прямоугольный треугольник. Разделим пополам дугу BC и получаемую точку соединим с A. Таким образом мы с высокой точностью изобразим биссектрису угла A. Разделим AC на четыре равные части и отметим точку M на AC. Получив точку K пересечения AN и BM, посмотрим, соответствует ли расположение отрезков AK и KN условиям задачи (рис. 1,*a*). Придется констатировать, что для построения правдоподобного чертежа нам пришлось бы расположить точку B настолько близко к точке A, что необходимые для размышления над решением задачи детали чертежа просматривались бы с трудом или вовсе не просматривались. Поэтому пожертвуем правдоподобностью ради наглядности и изобразим треугольник так, как это сделано на рисунке 1,*a*. Удалив с чертежа вспомогательные линии, получим приличную заготовку для обдумывания (рис. 1,*b*).

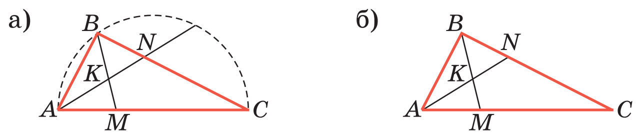


Рис. 1

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru (Шаблоны.)

В чем особенности задачи? Во-первых, есть треугольник с двумя пересекающимися отрезками в нем (фрагмент 3 в наборе шаблонов), во-вторых, задано отношение длин отрезков, на которые делится сторона концом одного из отрезков (фрагмент 3), в-третьих, один из отрезков — биссектриса (фрагмент 13) и, наконец, треугольник прямоугольный. Обработаем все замеченные особенности.

Согласно сопровождающим ситуацию (3) «треугольник с двумя пересекающимися отрезками» пожеланиям, надо через конец одного из отрезков провести прямую, параллельную прямой, включающей другой отрезок, и использовать подобие появившихся в результате такой операции треугольников. Как отмечено в пожелании, лучше провести прямую через конец того отрезка, о котором известно какое-либо отношение. В нашем случае известно отношение $AM : CM$. Выразим длины отрезков AM и CM в условной единице длины, пусть $AM = x$, $CM = 3x$, и проведем прямую через точку M параллельно прямой AN (рис. 2,*а*). Получаем две пары подобных треугольников (фрагмент 1):

$$\triangle ANC \sim \triangle MDC, \ \triangle BMD \sim \triangle BKN.$$

Для первого из подобий известен его коэффициент, поэтому начнем с его обработки:

$$\frac{AN}{MD}=\frac{CN}{CD}=\frac{AC}{CM}=\frac{4}{3}.$$

Отсюда и из условий получаем, что $DM = 3$ и известно отношение $CN : CD$. Последнее побуждает ввести еще одну условную единицу длины и записать: $DN = y$, $CD = 3y$ (рис. 2,*б*).

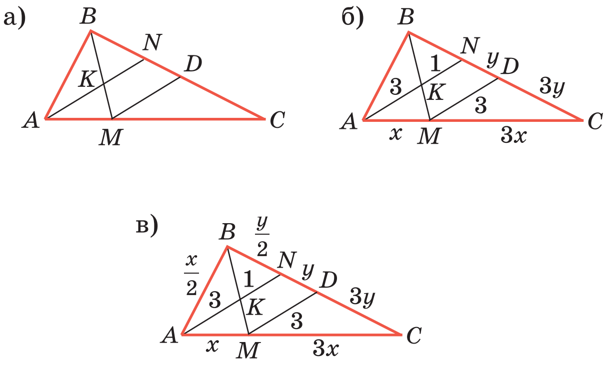


Рис. 2

Обработаем второе из замеченных подобий (см. рис. 2,*б*). Имеем:

$$\frac{BD}{BN}=\frac{BM}{BK}=\frac{MD}{KN}=\frac{3}{1},$$

откуда $BN=\frac{y}{2}$. Получили разбиение отрезка BC на отрезки с известными отношениями длин.

Большего, по-видимому, первые две из отмеченных особенностей не дадут. Как использовать биссектрису? Скорее всего, надо обратиться к делению стороны на отрезки, пропорциональные прилегающим сторонам. В нашем случае известность отношения $BN : CN = 1 : 8$ приводит к тому, что длина стороны AB выражается через x, а именно $AB=\frac{x}{2}$ (рис. 2,*в*).

Выражение в условных единицах длин всех сторон треугольника зачастую служит поводом для составления уравнения путем применения теоремы Пифагора или теоремы косинусов. Так как у нас угол ABC прямой, можно применить теорему Пифагора к треугольникам ABC и ABN. В результате получаем систему уравнений:

$$16x^2=\frac{1}{4}x^2+\frac{81}{4}y^2, \quad \frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}y^2=16,$$

решая которую, находим, что $x=6$, $y=2\sqrt{7}$. Остается записать ответ: $AB=3$, $BC=9\sqrt{7}$, $AC=24$.

Пример 2. В треугольнике ABC на стороны AB и BC опущены высоты CD и AE, причем $AD : BD = 1 : 2$, $CE : BE = 1 : 3$. Сторона AC равна a. Найти площадь треугольника.

Согласно пожеланиям по изображению треугольника с двумя высотами (фрагмент 10), начнем с полуокружности. Нарисуем полуокружность с диаметром AC и за пределами окаймляемого ею полукруга возьмем точку на роль вершины B треугольника ABC. Соединим B с точками A и C, обозначим согласно условию буквами D и E точки пересечения отрезков AB и BC с полуокружностью (они суть основания высот из вершин C и A соответственно) и посмотрим, выполнены ли предложенные в задаче соотношения. Если построенный чертеж дает картину, недостаточно адекватную условию, меняем положение точки B, и так до тех пор, пока не получится устраивающий нас рисунок (рис. 3).

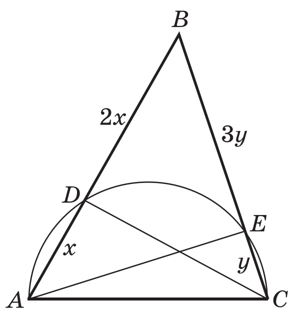


Рис. 3

Выберем для отрезков AB, BC условные единицы измерения и отметим длины отрезков (см. рис. 3). Мы не стали удалять полуокружность после того, как были изображены высоты, и это позволяет нам воспользоваться рекомендацией к фрагменту 23 (две секущие, исходящие из одной точки), согласно которой можно записать равенство $3x \cdot 2x = 4y \cdot 3y$, то есть $x^2 = 2y^2$. Осталось выразить x и y через заданную величину a, чтобы получить возможность найти площадь. С высотой в треугольнике всегда связана ситуация двух прямоугольных треугольников с общим катетом, коим служит высота (фрагменты 11 и 12). У нас даже две высоты. Выражая квадрат длины CD из треугольников ACD и BCD и приравнивая результаты, получаем уравнение

$$16y^2 - 4x^2 = a^2 - x^2,$$

а используя высоту AE — уравнение

$$9x^2 - 9y^2 = a^2 - y^2.$$

Решая эту систему уравнений, находим, что

$$x^2 = \frac{a^2}{5}, \quad y^2 = \frac{a^2}{10}.$$

Вычислим площадь. Найдем одну из рассматриваемых высот. Например, из треугольника ACD имеем $CD = \frac{2a}{\sqrt{5}}$, после чего можно записать выражение для площади:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CD = \frac{3a^2}{5}.$$

Пример 3. В остроугольном треугольнике ABC высоты AK и CL пересекаются в точке H. Известно, что $CH = 8$, $HL = 3$ и $AH : HK = 6 : 1$. Найти радиус окружности, описанной около треугольника HLK.

Изобразим полуокружность и горизонтально проведем ее диаметр AC. Поскольку в условии треугольник остроугольный, возьмем точку B, расположенную выше этой полуокружности, и соединим ее отрезками с точками A и C. Точки пересечения этих отрезков с полуокружностью, представляющие собой основания высот, обозначим через K и L (рис. 4). Нельзя сказать, что на чертеже получилось соответствующее условию отношение отрезков AH и HK, однако оставим этот чертеж без изменений ради наглядности.

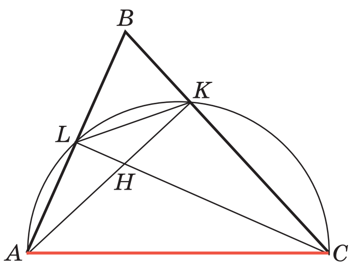


Рис. 4

Займемся поиском особенностей. В результате нашего подхода к построению чертежа имеем окружность и две секущие, причем с ними связаны две хорды, AK и CL. Налицо фрагмент 22 из перечня. Можно сначала посмотреть самый простой ход, отмеченный в пояснении к фрагменту 21: произведения длин отрезков хорд, на которые они делятся точкой пересечения, равны между собой. Если, ориентируясь на заданное отношение, положить $HK = x$, $AH = 6x$, то сформулированное утверждение приведет к равенству $6x^2 = 24$, из которого $x = 2$.

Для начала неплохо. Теперь можно подумать над вопросом: откуда найти требуемое? Как обычно, радиус описанной окружности будем искать, опираясь на теорему синусов. В треугольнике HKL известны две стороны, так что поиск радиуса сводится к поиску синуса, например, угла AKL. Поскольку этот угол связан с окружностью, можно обратить внимание на рекомендации к фрагменту 20 перечня и заметить, что это вписанный в окружность угол. Он опирается на дугу AL. На эту же дугу опирается вписанный в окружность угол ACL. Но последний представляет собой угол в прямоугольном треугольнике ACL. В этом треугольнике известен катет CL. Задавшись вопросом «Откуда найти отрезок AC или отрезок AL?», отвечаем, что из треугольника, в котором искомый отрезок — сторона. Отрезок AL является катетом прямоугольного треугольника AHL, в котором известны две другие стороны. По теореме Пифагора имеем $AL^2 = 135$. Из треугольника ACL получаем $AC = 16$ и $\sin\angle ACL = \frac{3\sqrt{15}}{16}$. По теореме синусов радиус описанной около треугольника HKL окружности равен $\frac{8}{\sqrt{15}}$.

Если не обращаться к окружности при построении чертежа, то можно провести рассуждения на основе подобия прямоугольных треугольников, связанных с высотами.

Пример 4. В треугольнике ABC на продолжении медианы BM выбрана точка K так, что $MK : BM = 1 : 2$. Известно, что $AB = 5$, $BC = 3$, $CK = 4$. Найти AK.

Простота указанных в условии свойств позволяет нарисовать чертеж без анализа свойств участвующих в условии объектов. Нарисуем треугольник, в нем медиану, продолжим ее и получим приемлемый чертеж (рис. 5).

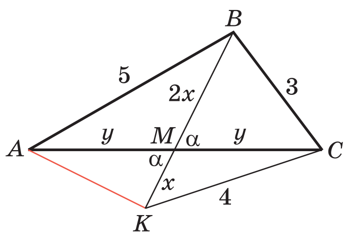


Рис. 5

Каковы особенности? Есть одна медиана. Относящиеся к медиане шаблоны представлены на фрагментах 15 и 16. Сильная особенность — своеобразие искомой величины. Надо найти некий отрезок. Для придания целенаправленности нашим рассуждениям поставим вопрос: «Откуда найти AK и как?» Ясно, что из треугольника как его сторону. Прямоугольных треугольников, в которых AK является стороной, не видно, поэтому будем анализировать все подходящие, даже, если потребуется, построим такие треугольники дополнительно. По каждому из подходящих треугольников обсудим шансы нахождения AK. Отрезок AK является стороной в трех изображенных на рисунке 5 треугольниках, а именно треугольниках ABK, AMK и ACK.

В треугольнике ABK известна одна сторона и совсем нет известных углов. Чтобы искать AK из этого треугольника, надо найти углы, а также отрезок BK. Если насчет отрезка BK видны какие-то шансы, так как он связан с медианой, то откуда брать углы — неясно. Такая же ситуация с треугольником ACK. Треугольник AKM более перспективен, ибо в нем есть угол AMK, и именно такой угол принимает участие в шаблоне 16. Обратимся к пожеланиям, сопровождающим указанный шаблон. Обозначив угол AMK через α, находим, что

$$\angle AMB = \pi - \alpha,$$
$$\angle BMC = \alpha,\ \angle CMK = \pi - \alpha,$$

и если записать теорему косинусов для треугольников ABM, BCM, CKM и AKM, то появится система уравнений, из которой есть надежда найти требуемое.

Займемся технической реализацией намеченного плана. Пусть

$$KM = x,\ BM = 2x,\ AM = CM = y.$$

Тогда теорема косинусов, примененная к треугольникам ABM, BCM, CKM, даст соответственно уравнения:

$$25 = y^2 + 4x^2 + 4xy\cos\alpha, \qquad (1)$$
$$9 = y^2 + 4x^2 - 4xy\cos\alpha, \qquad (2)$$
$$16 = y^2 + x^2 + 2xy\cos\alpha. \qquad (3)$$

Получили систему трех уравнений с тремя неизвестными, которая без особого труда решается. Например, вычтя из первого уравнения второе, получим $xy\cos\alpha = 2$; подставим эту информацию в третье: $y^2 + x^2 = 12$; затем сложим первое и второе уравнения: $y^2 + 4x^2 = 17$. Из последних двух уравнений найдем, что

$$x^2 = \frac{5}{3},\ y^2 = \frac{31}{3},$$

а подставив эти данные в уравнение (3), получим, что $\cos\alpha = \frac{6}{\sqrt{155}}$. Из треугольника AKM имеем $AK^2 = 8$. В итоге $AK = 2\sqrt{2}$.

Пример 5. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AB угол между медианами AM и BN равен $\operatorname{arctg}\frac{3}{17}$. Найти AB, если площадь треугольника ABC равна 8.

Нарисуем прямоугольный треугольник, медианы к его катетам и отметим угол α между медианами, о котором известно, что $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{17}$ (рис. 6,*а*).

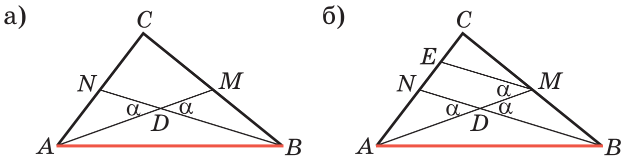


Рис. 6

Займемся анализом особенностей задачи. Есть две медианы, и обратим внимание на то, как они делятся точкой пересечения (фрагмент 14). Далее, задана площадь. Обычно задание площади служит поводом для составления уравнения. Здесь эта идея кажется привлекательной: обозначив отдельными буквами длины катетов, можно написать, что их произведение равно удвоенной площади. А что дальше? Мы при этом никак не затрагиваем данный нам угол, а значит, второе уравнение с использованием катетов получить проблематично.

Можно попробовать составить с помощью заданной площади уравнение, выражая площадь треугольника, в котором участвует заданный угол, например, треугольника ADN, где D — точка пересечения медиан. Нетрудно заключить, что площадь этого треугольника в 6 раз меньше площади треугольника ABC, то есть равна $\frac{4}{3}$. Длины сторон AD и DN нетрудно выразить через катеты по теореме Пифагора и тем самым можно к запланированному выше уравнению добавить уравнение на основе площади треугольника ADN. Прежде чем заняться вычислениями, представим перспективы. Стороны будут выражены с использованием радикалов, так что уравнение, скорее всего, получится не из простых. Это соображение побуждает продолжить анализ особенностей.

Конечно, просматривается часто встречаемая в задачах особенность, отраженная на позиции 3, в которой речь идет о двух отрезках в треугольнике. Обычно ее применяют в тех случаях, когда есть какие-то отношения или длины. Здесь отношения есть благодаря медианам, а линейных размеров нет. Тем не менее на всякий случай проделаем сопутствующее этой позиции построение, а именно через точку M или через точку N проведем прямую, параллельную соответствующей медиане. Поскольку никаких видимых предпочтений для выбора точки нет, возьмем наугад: через M проведем параллельно BN прямую, которая пересечет катет AC в точке E. Параллельность влечет равенство углов, стало быть, угол AME равен α (рис. 6,*б*).

Появилась новая информация, и мы снова задаем вопрос: особенности? Возникли два прямоугольных треугольника с общим катетом — это треугольники CME и CMA. Обратим внимание на фрагмент 11 и сравним тангенсы углов. В нашем случае

$$\mathrm{tg}\angle AMC = 4\mathrm{tg}\angle EMC,$$

и если обозначить угол EMC через β, то получим

$$\mathrm{tg}\,(\alpha+\beta) = 4\mathrm{tg}\,\beta.$$

Однако $\mathrm{tg}\,\alpha$ известен, а тогда можно найти и $\mathrm{tg}\,\beta$. Это уже совсем хорошо, ибо, полагая $BC = x$, $AC = y$, можно написать уравнение $\mathrm{tg}\,\beta = \dfrac{\frac{y}{4}}{\frac{x}{2}}$, которое вместе с полученным из площади уравнением $xy = 16$ даст простую систему.

Теперь есть смысл заняться вычислениями, а именно нахождением значения $\mathrm{tg}\,\beta$. Имеем:

$$4\mathrm{tg}\,\beta = \mathrm{tg}\,(\alpha+\beta) =$$

$$= \frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta}{1-\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta} = \frac{\frac{3}{17}+\mathrm{tg}\,\beta}{1-\frac{3}{17}\mathrm{tg}\,\beta}.$$

Решая последнее уравнение, получим

$$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{17\pm\sqrt{273}}{8}.$$

Таким образом, пришли к системе

$$\begin{cases} xy = 16, \\ \dfrac{y}{2x} = \dfrac{17\pm\sqrt{273}}{8}. \end{cases}$$

Перемножив уравнения системы, получим

$$y^2 = 4\left(17\pm\sqrt{273}\right),$$

а тогда

$$x^2 = \frac{64}{17\pm\sqrt{273}} = 4\left(17\mp\sqrt{273}\right).$$

Отсюда

$$AB^2 = x^2 + y^2 = 4\left(17\mp\sqrt{273}\right) + 4\left(17\pm\sqrt{273}\right) = 8\cdot 17.$$

Следовательно, $AB = 2\sqrt{34}$.

Пример 6. Дан треугольник со сторонами $AB = 4$, $BC = 5$ и $AC = 6$.

а) Доказать, что прямая, проходящая через точку пересечения медиан и центр вписанной окружности, параллельна стороне BC.

б) Найти длину биссектрисы треугольника ABC, проведенной из вершины A.

При построении чертежа можно сначала изобразить треугольник с указанными сторонами, а затем отметить центр вписанной окружности как точку пересечения его биссектрис и точку пересечения медиан. А можно побеспокоиться о большей адекватности чертежа условиям задачи и изобразить биссектрисы на основе описанной около треугольника окружности. Мы не будем напрягаться и начнем с треугольника.

Поскольку в финале придется искать длину биссектрисы из вершины A, удобнее расположить эту вершину сверху (рис. 7). Отметим точку P пересечения медиан и точку O пересечения биссектрис.

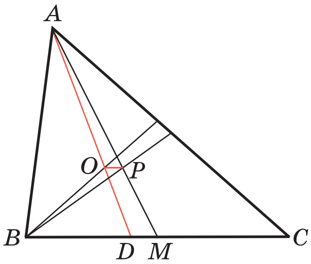


Рис. 7

Что может обеспечить параллельность отрезков OP и BC? Можно попробовать сориентироваться на признаки параллельности двух прямых, связанные с пересечением ее третьей прямой. Однако здесь не очень ясно, какую прямую взять в качестве третьей и на какие углы ориентироваться. Можно попробовать увидеть отрезки этих прямых в качестве соответственных сторон подобных треугольников, как это изображено на фрагментах 1 и 2 перечня, и этот путь, видимо, более перспективен, так как такие треугольники несложно просматриваются — это треугольники AOP и ADM, где AD и AM суть биссектриса и медиана треугольника ABC.

Для доказательства параллельности OP и DM достаточно убедиться в подобии этих треугольников. Угол с вершиной A у них общий, стало быть, достаточно доказать одинаковую пропорциональность сторон AO, AD и AP, AM. Так как P — точка пересечения медиан (фрагмент 14), имеем $AP : PM = 2 : 1$. Отношение $AO : OD$ можно обнаружить в треугольнике ABD, в котором BO — биссектриса (фрагмент 13). Для нахождения отношения надо знать длину BD. Отрезок AD — биссектриса в треугольнике ABC, и по ее свойству имеем $BD : DC = AB : AC = 2 : 3$. Но $BC = 5$, следовательно, $BD = 2$, $CD = 3$. Из треугольника ABD находим, что $AO : OD = 2 : 1$. Тем самым требуемое равенство отношений доказано, треугольники AOP и ADM подобны и $OP \parallel DM$.

Длину биссектрисы AD найти несложно, это можно сделать из треугольника ABD по теореме косинусов. Из треугольника ABC по теореме косинусов нетрудно получить, что $\cos\angle ABC=\frac{1}{8}$. Стало быть, $AD^2=18$ и $AD=3\sqrt{2}$.

Пример 7. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки K, L и M, причем $AK:KB=2:3$, $BL:LC=1:2$, $CM:MA=3:1$. В каком отношении отрезок KL делит отрезок BM?

Изобразим треугольник ABC, разделим стороны на соответствующие части и отметим на сторонах точки K, L и M (рис. 8). Как обычно, обработаем отношение, задав на каждой из сторон некую условную единицу измерения и выразив длины соответствующих отрезков в этих единицах. А именно, пусть $AM=x$, $CM=3x$, $AK=2y$, $BK=3y$, $BL=z$, $CL=2z$.

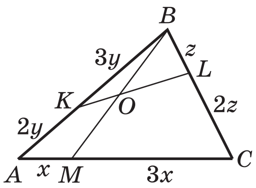


Рис. 8

Каковы особенности, связанные с данными? Много отношений и есть отрезки в треугольнике. С этим наблюдением связаны фрагменты 3 и 4 перечня. Значит, надо либо через конец какого-то из них проводить параллельные другому отрезку линии, если следовать рекомендациям фрагмента 3, либо проводить прямую, параллельную какой-то стороне, и выносить на нее подобие, если ориентироваться на рекомендации фрагмента 4. Так как доли отрезков не очень хорошо соизмеряются, видимо, уместнее воспользоваться фрагментом 4.

Через вершину B проведем прямую, параллельную AC, и пусть E — точка пересечения прямой KL с этой прямой, а F — точка пересечения прямой KL с прямой AC (рис. 9). Получаем набор подобных треугольников.

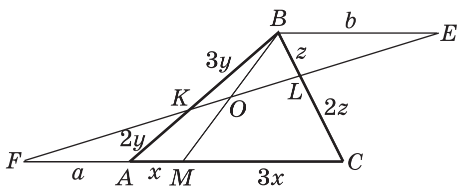


Рис. 9

Запишем информацию, вытекающую из подобий треугольников «через точки L, K и O», то есть подобий треугольников BEL и CFL, AKF и BKE, FMO и EBO. Для краткости и эффективности обозначим $AF=a$, $BE=b$. Имеем:

$$\frac{a+4x}{b}=\frac{CL}{BL}=2,$$

$$\frac{a}{b}=\frac{AK}{KB}=\frac{2}{3},\qquad \frac{MO}{BO}=\frac{a+x}{b}=\frac{a}{b}+\frac{x}{b}.$$

Из первого равенства с учетом второго имеем:

$$\frac{a}{b}+4\frac{x}{b}=2 \Leftrightarrow \frac{2}{3}+4\frac{x}{b}=2 \Leftrightarrow \frac{x}{b}=\frac{1}{3},$$

откуда получаем, что $MO:BO=1:1$.

Пример 8. Основания AD и BC равнобедренной трапеции $ABCD$ равны соответственно 8 и 4. Перпендикуляр AP, опущенный из вершины A на сторону CD, делит среднюю линию трапеции пополам. Найти площадь трапеции.

В условии задачи есть свойства, которые стоит отразить на чертеже, с них и начнем. Нарисуем отрезок AD в качестве основания трапеции, из точек A и D проведем под острым углом лучи и из точки A проведем к лучу с вершиной D перпендикуляр (рис. 10,*а*). Будем поднимать прямую, параллельную AD, понемногу вверх, и зафиксируем момент, когда ее отрезок между проведенными ранее лучами разобьется на два равных отрезка. Это будет средняя линия будущей трапеции (см. рис. 10,*а*). Проведем верхнее основание так, чтобы предыдущий отрезок оказался средней линией. Если оно примерно в два раза меньше нижнего, то чертеж готов, если нет, то повторим процедуру, изменив величину начального угла. У нас получился с первого раза приемлемый рисунок (рис.10,*б*), но мог и не получиться…

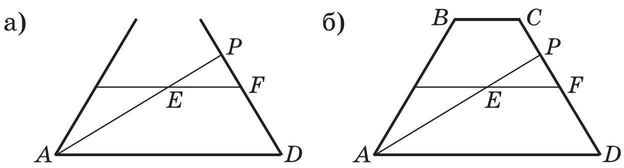


Рис. 10

Займемся поиском особенностей. Одна из особенностей — деление средней линии на две равные части, но эта особенность скорее всего скажется на этапе вычислительной работы. Общая особенность — перпендикуляр, то есть наличие прямоугольного треугольника. На чертеже видны по крайней мере два прямоугольных треугольника, это треугольники APD и EPF. Они, как нетрудно доказать, подобны.

Есть еще одна особенность — равнобедренность трапеции. Это не настолько часто встречающаяся особенность, чтобы ей было отведено место в наборе фрагментов, но в этом примере ее отметим. Равнобедренность трапеции нередко побуждает провести из вершин меньшего основания перпендикуляры на большее и в результате этого действия «отразить» меньшее основание на большем. Эта процедура порождает два прямоугольных треугольника. В нашем случае, опустив перпендикуляр из C на AD и обозначив через K его основание, получим прямоугольный треугольник (рис. 11).

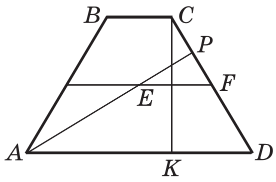


Рис. 11

Задав еще раз вопрос об особенностях, можем найти, что есть конфигурация, близкая к фрагменту 7. Тот факт, что у нас, в отличие от фрагмента 7, нет равных отрезков, не может помешать нам воспользоваться рекомендациями к этому фрагменту, а именно отметить подобие треугольников APD и CKD как прямоугольных треугольников с общим углом D. Заметив, что $DK = 2$, имеем:

$$\frac{CD}{8} = \frac{2}{PD} \Leftrightarrow CD \cdot PD = 16. \qquad (1)$$

Обработаем отмеченное выше подобие треугольников APD и EPF:

$$\frac{PF+FD}{PF} = \frac{AD}{EF} = \frac{8}{3} \Rightarrow \frac{FD}{PF} = \frac{5}{3} \Rightarrow PF = \frac{3}{5}FD = \frac{3}{5}CF \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CP = \frac{2}{5}CF \Rightarrow CP = \frac{1}{5}CD \Rightarrow PD = \frac{4}{5}CD.$$

Подставив найденное соотношение в (1), получим $CD = 2\sqrt{5}$. Осталось завершить решение. Из треугольника CDK имеем $CK = 4$, так что площадь равна 24.

Упражнения

1. В треугольнике ABC медиана AK, биссектриса BL и высота CM пересекаются в одной точке P. Найдите площадь треугольника ABC, если $CP = 5$, $PM = 3$.

2. В треугольнике ABC точка K — середина медианы BM. Известно, что $AB = 7$, $BC = 5$, $AK = 6$. Найдите CK.

3. В равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC диагонали пересекаются в точке M. Найдите площадь трапеции $ABCD$, если известно, что угол AMB равен $\arccos\frac{3}{5}$, а средняя линия трапеции равна 4.

4. Основания AD и BC трапеции $ABCD$ равны соответственно 9 и 3. Точка E — середина боковой стороны AB, точка F — середина CD. Биссектриса угла BAD пересекает среднюю линию EF в точке P, биссектриса угла ADC — в точке Q. Известно, что отрезки EQ, PQ и PF равны. Найдите площадь трапеции.

5. Стороны AB и AC треугольника ABC равны соответственно 4 и 6. Точка E — середина AB, точка F — середина BC. Биссектриса угла BAC пересекает среднюю линию EF в точке P, биссектриса угла ACB — в точке Q, причем $EQ = PQ = PF$. Найдите площадь треугольника.

6. Вершина A квадрата $ABCD$ соединена прямой с точкой M на стороне CD, причем длина отрезка AM равна d. Биссектриса угла BAM пересекает сторону BC в точке N. Определите длину стороны квадрата, если $BN = 2MD$.

7. В прямоугольном треугольнике ABC катеты AB и BC относятся как $1 : 2$. На гипотенузе AC выбраны точки M и N так, что отрезки BM и BN делят угол B на три равные части. Найдите отношение отрезков BM и BN.

8. В треугольнике ABC стороны AB и AC равны соответственно 4 и 3. Медиана, проведенная из вершины A, делит угол BAC в отношении $1 : 2$. Найдите длину медианы.

9. В трапеции боковые стороны равны 9 и 5, а расстояние между серединами оснований равно 6. Найдите расстояние между серединами диагоналей трапеции.

10. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) на боковых сторонах AB и BC выбраны точки M и K так, что $AM : MB = BK : KC = 2 : 1$. Найдите стороны треугольника ABC, если $AK = 2$, $CM = 2$.

Ответы: **1.** 60. **2.** $2\sqrt{6}$. **3.** 8. **4.** $6\sqrt{55}$. **5.** $3\sqrt{7}$. **6.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}d$. **7.** $\left(3\sqrt{3}-4\right):1$. **8.** $\frac{\sqrt{177}}{6}$. **9.** $\sqrt{17}$. **10.** $AC = \sqrt{3}$, $AB = BC = 3\sqrt{2}$.

Литература

1. *Дятлов В.* Как научить(ся) решать задачи по планиметрии: Лекция 1. Методы анализа планиметрических задач // Математика, 2016, № 1. 2. *Дятлов В.* Как научить(ся) решать задачи по планиметрии: Лекция 2. О построении чертежей // Математика, 2016, № 2. 3. *Дятлов В.Н.* Математические этюды для абитуриентов, учащихся, учителей. Этюд № 9. Как научить(ся) решать задачи по планиметрии. — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2015. 4. *Белоносов В.С., Фокин М.В.* Задачи вступительных экзаменов по математике. — Изд. 8-е, исправленное и дополненное. — Новосибирск: Сибирское университетское издательство, 2005. 5. Математика: 30 типовых вариантов экзаменационных работ для подготовки к ЕГЭ / авт.-сост. И.В. Ященко, И.Р. Высоцкий, А.С. Трепалин; под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. — М.: АСТ: Астрель, 2014.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ТЕСТЫ

Математика. Тематические тесты. 5 класс / сост. В.И. Ахременкова. — М.: ВАКО, 2016. — 64 с. — (Тематические тесты).
Математика. Тематические тесты. 6 класс / сост. В.И. Ахременкова. — М.: ВАКО, 2016. — 64 с. — (Тематические тесты).

Пособия содержат девять тестов тематического контроля и один тест рубежного контроля (итоговый) в двух вариантах, равнозначных по форме заданий, содержанию, деятельностным характеристикам и ориентировочной трудности. Эти тесты могут быть использованы при работе по учебникам Н.Я. Виленкина и др. для 5–6-х классов.

Тематические тесты, представленные в пособиях, являются *критериально-ориентированными*, то есть педагогическими тестами, предназначенными для оценки уровня подготовленности каждого тестируемого в соответствии с требованиями учебной программы или ее части, причем критический уровень объема знаний, умений и навыков — критерий, с которым сравнивается результат каждого тестируемого, — устанавливается до начала тестирования.

Каждый тест имеет кратную спецификацию — документ, включающий *содержательно-деятельностную* (технологическую) *матрицу* и *план*, которые представлены в виде таблиц.

Содержательно-деятельностная матрица позволяет сразу понять, какие элементы содержания и виды деятельности контролирует данный тест. В плане теста каждое тестовое задание (ТЗ) соотносится с определенным элементом содержания учебного предмета, контролируемым знанием или умением, уровнем усвоения учебного материала, уровнем трудности (определенным на апробации или предполагаемым), формой тестового задания. Перечни объемов контроля, уровней усвоения знаний и умений, форм заданий, используемых в тестах, приводятся.

Отраженные в плане деятельностные характеристики тестовых заданий (виды знаний и умений и уровень их усвоения) пригодятся учителю при анализе результатов тематического тестирования (выполнения отдельных заданий). Педагог сможет понять, какие умения у учеников плохо сформированы, нет ли перекосов в сторону только одного уровня усвоения (например, уровня воспроизведения), и получит максимально полную информацию о структуре знаний каждого учащегося и группы в целом, а также возможность скорректировать учебный процесс на групповом и индивидуальном уровнях.

В пояснительной записке приводится методическая информация, общая для всех тестов комплекта. В частности, на основе содержания учебника и нормативных документов обоснована разбивка по темам; дается список элементов содержания по математике и пронумерованный общий перечень контролируемых видов деятельности, охватывающий те знания и умения, которые проверяются всеми видами тестовых заданий и соответствуют требованиям ФГОС.

Н. АВИЛОВ,
avilow@rambler.ru,
ст. Егорлыкская, Ростовская обл.

ГЕОГРАФИЧЕСКАЯ ГОЛОВОЛОМКА

Ведущий рубрики — Николай Иванович Авилов — на фоне своей коллекции головоломок

Пазлы известны всем. Это очень популярные головоломки на складывание картин из кусочков картона. Пазлы складывают и стар, и млад. Малыши, складывая иллюстрации к известным сказкам, развивают мелкую моторику, взрослые с помощью пазлов «рисуют» репродукции картин известных художников или пейзажы различных уголков нашей планеты. Нужно провести немало часов в семейном кругу, проявить много терпения, чтобы «покорить», например, величавую красоту неприступных гор, «ощутить» мощь и силу водопада или «построить» Эйфелеву башню.

Пазлы были изобретены Джоном Спилсбери, лондонским торговцем картами, в 1763 году и представляли собой географические карты или их части, наклеенные на деревянную основу и разрезанные по границам стран. Из полученных таким образом кусочков причудливой формы нужно было восстановить карту. Это изобретение использовалось как учебное пособие на уроках географии.

Во время подготовки к VI Фестивалю науки Юга России мы с учениками решили повторить путь изобретателя пазлов. Для этого нарисовали на магнитном пластике карту административного деления Ростовской области, аккуратно разрезали ее на отдельные районы, приклеили к ним цветные наклейки, подписали названия районных центров. Головоломка готова! Можно приступать не только к изучению географии Ростовской области, но и анализировать форму отдельных кусочков и учиться комбинировать.

А надо сказать, что раскраска карт является математической задачей. Это так называемая проблема четырех красок. Дело в том, что географы, раскрашивая карты, стараются обойтись меньшим набором цветов, при этом раскрашивают их с таким расчетом, чтобы две страны, имеющие общую границу, были окрашены разным цветом. В 1852 году англичанин Френсис Гутри, раскрашивая карту Англии, заметил, что ему хватает четырех красок, а вот тремя красками не обойтись. Естественно, возник вопрос: для раскраски любой ли карты хватит четырех красок? Он оказался очень трудным. Лишь через 100 лет с помощью компьютера было доказано, что для раскраски любой карты хватает четырех красок! Наш пример раскраски карты Ростовской области подтверждает теперь уже доказанный факт. Кстати, с помощью этой же карты можно обосновать, что ее нельзя раскрасить в три цвета. Попробуйте.

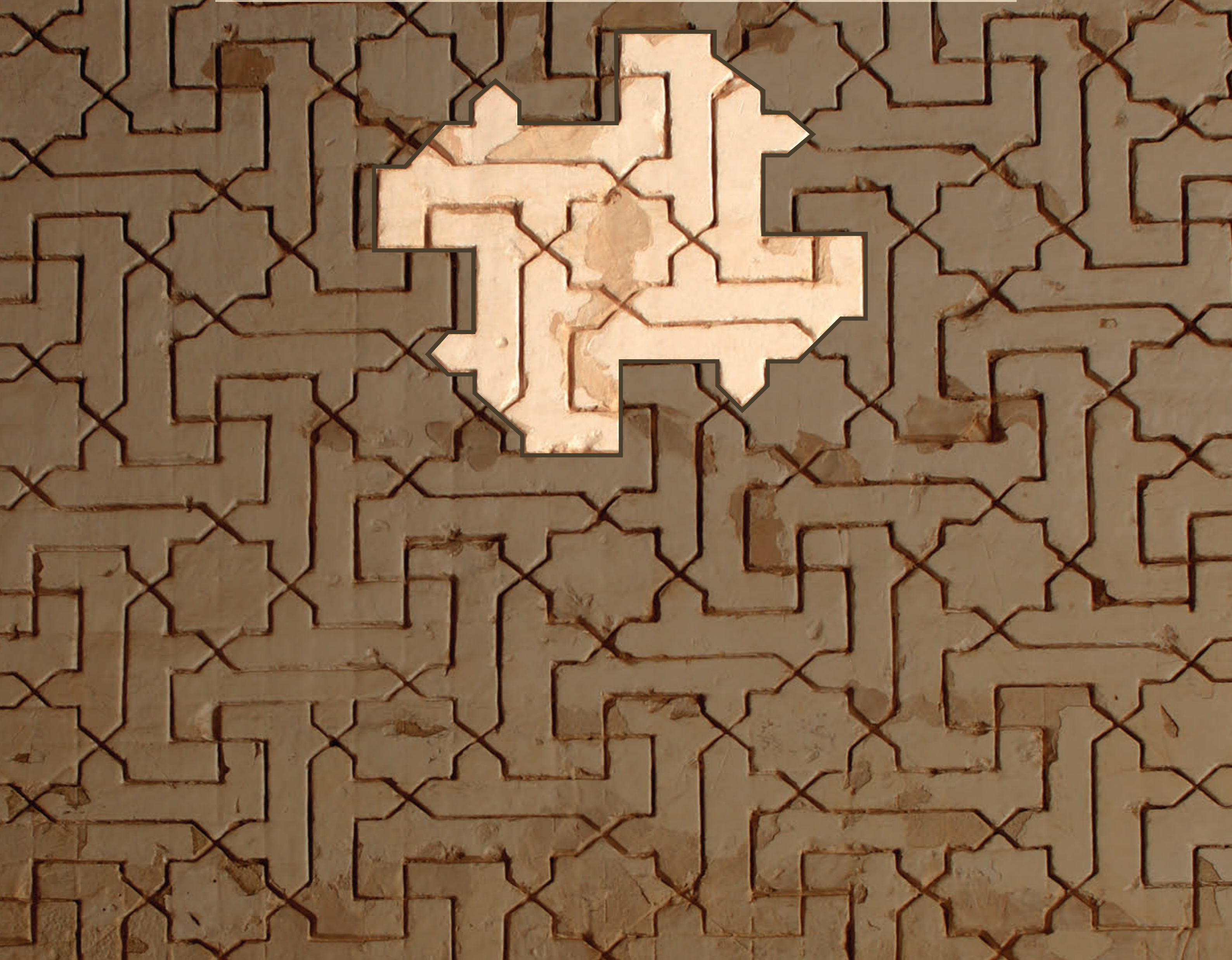
Наша головоломка оказалась очень популярной на Фестивале науки, который прошел в Ростове-на-Дону в ноябре 2015 года. У нашего стенда с головоломками было всегда многолюдно, и наша географическая головоломка решалась постоянно. Оказывается, не все хорошо знакомы с географией родного края, да и комбинировать фигурки неправильной формы многим было трудновато.

Советую сделать аналогичные пазлы для карты своего региона. Это будет очень познавательно для ребят, они расширят свой кругозор знаниями о родном крае.

К материалу есть приложение в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru (Решение головоломки.)

Порядок поворота орнамента равен 4, орнаментальная плоскость переходит в себя при повороте на 90°. Осевая симметрия отсутствует. Нет и скользящей симметрии. Перенос базового фрагмента осуществляется по двум взаимно перпендикулярным осям.

<table>
<tr><td colspan="3">Порядок поворота равен 4</td></tr>
<tr><td colspan="3">Есть ли осевая симметрия?</td></tr>
<tr><td colspan="2">Да</td><td>Нет</td></tr>
<tr><td colspan="2">Есть ли скользящая симметрия относительно оси, которая не является осью симметрии?</td><td rowspan="3">p4</td></tr>
<tr><td>Да</td><td>Нет</td></tr>
<tr><td>cm</td><td>pm</td></tr>
</table>



mat.1september.ru | Подписка на сайте www.1september.ru или по каталогу «Почта России»: 79073 (бумажная версия); 12717 (CD-версия)